

PROBLEMY I ZADANIA (1-40)
I. LOGIKA MATEMATYCZNA (KRZ i KWRP)

1. Zbudować tabelę wszystkich funktorów dwuargumentowych. Sprawdzić ich nieredukowalność ze względu na obie zmienne.

Rozwiązanie. Wszystkich funktorów dwuargumentowych jest 16. Oznaczmy je symbolami $o_i, i = 1, 2, \dots, 16$.

Funktory	$v(\alpha) \ v(\beta)$				Uwagi	Oznaczenie
	00	01	10	11		
o_1	0	0	0	0	Funktory redukowalny	0
o_2	0	0	0	1	Koniunkcja (czyt. α i β)	\wedge
o_3	0	0	1	0	Koniunkcja z zakazem β	\downarrow
o_4	0	0	1	1	Funktory redukowalny	
o_5	0	1	0	0	Koniunkcja z zakazem α	\uparrow
o_6	0	1	0	1	Funktory redukowalny	
o_7	0	1	1	0	Alternatywa wykluczająca (albo α albo β)	\oplus
o_8	0	1	1	1	Alternatywa (α lub β)	\vee
o_9	1	0	0	0	Jednoczesne zaprzeczenie (ani α ani β)	\therefore
o_{10}	1	0	0	1	Równoważność (α wtedy i tylko wtedy, gdy β)	\leftrightarrow
o_{11}	1	0	1	0	Funktory redukowalny	
o_{12}	1	0	1	1	Implikacja odwrotna (jeżeli β , to α)	\leftarrow
o_{13}	1	1	0	0	Funktory redukowalny	
o_{14}	1	1	0	1	Implikacja (jeżeli α , to β)	\rightarrow
o_{15}	1	1	1	0	Funktory Sheffera (nie α lub nie β)	\otimes lub $ $
o_{16}	1	1	1	1	Funktory redukowalny	1

Zbadamy, czy funktor o_3 zwany koniunkcją z zakazem β jest nieredukowalny ze względu na α i β . Ponieważ $o_3(0, 0) \neq o_3(1, 0)$, więc funktor ten nie jest redukowalny ze względu na α .

Ponieważ $o_3(1, 0) \neq o_3(1, 1)$, więc funktor ten nie jest redukowalny ze względu na β .

Stąd koniunkcja z zakazem β jest funktorem nieredukowalnym.

2. Ile jest wszystkich funktorów trójargumentowych? Ile jest funktorów czteroargumentowych? Określić dowolny funktor
- trójargumentowy,
 - czteroargumentowy.

Sprawdzić, czy funktory te są redukowalne. Podać kody dwójkowe liczb jakim odpowiada ich wartościowanie?

3. Określić dowolny nieredukowalny funktor
- trójargumentowy,
 - czteroargumentowy

Wykazać jego nieredukowalność.

4. Określić funktory trójargumentowe i czteroargumentowe tak, aby ich wartościowania odpowiadały dwójkowym kodom liczb a) 199, b) 426, c) 1875. Sprawdzić, czy są one redukowalne.

5. Wykazać, że podane napisy są formułami infiksowymi KRZ. Dla jakich wartości logicznych zmiennych zdaniowych p, q, r, s, t, u formuły te są: i) prawdziwe; ii) fałszywe

- $\neg(p \rightarrow q)$,
- $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow p$,
- $((p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow \neg q$,
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (s \wedge t) \vee (s \wedge u) \vee (t \wedge u) \vee (\neg p \wedge \neg s)$,
- $((p \vee q) \vee r) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \wedge r))$,
- $((p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)$,
- $(p \vee q) \rightarrow ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$,
- $((p \oplus q) \otimes r) \vee ((r \rightarrow p) \therefore q)$.

6. Udowodnić, że dla każdego zdania q zachodzą własności:

- $(0 \vee q) \leftrightarrow q$,
- $(0 \wedge q) \leftrightarrow 0$,
- $(1 \vee q) \leftrightarrow 1$,
- $(1 \wedge q) \leftrightarrow q$

gdzie 0 oznacza dowolne zdanie fałszywe, a 1 dowolne zdanie prawdziwe.

7. Zdefiniować wszystkie funktory jedno- i dwuargumentowe za pomocą:

- funktora negacji i implikacji,
- funktora negacji i alternatywy,
- funktora negacji i koniunkcji,
- (w) funktora Sheffera \otimes ,
- funktora jednoczesnego zaprzeczenia \therefore .

Odp. Wybrane definicje:

- $(p \vee q) \stackrel{def}{\leftrightarrow} (\neg p \rightarrow q)$, $(p \wedge q) \stackrel{def}{\leftrightarrow} \neg(p \rightarrow \neg q)$, $(p \leftrightarrow q) \stackrel{def}{\leftrightarrow} \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(q \rightarrow p)))$,
- $(p \wedge q) \stackrel{def}{\leftrightarrow} \neg(\neg p \vee \neg q)$, $p \rightarrow q \stackrel{def}{\leftrightarrow} \neg p \vee q$, $p \leftrightarrow q \stackrel{def}{\leftrightarrow} \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q))$,
- $(p \vee q) \stackrel{def}{\leftrightarrow} \neg(\neg p \wedge \neg q)$, $(p \rightarrow q) \stackrel{def}{\leftrightarrow} \neg(p \wedge \neg q)$,
- $(p \wedge q) \stackrel{def}{\leftrightarrow} (p \otimes q) \otimes (p \otimes q)$, $(p \rightarrow q) \stackrel{def}{\leftrightarrow} (((p \otimes q) \otimes p) \otimes q) \otimes p$,
 $(p \oplus q) \stackrel{def}{\leftrightarrow} ((p \otimes q) \otimes q) \otimes ((p \otimes q) \otimes p)$, $(p \leftrightarrow q) \stackrel{def}{\leftrightarrow} ((p \otimes p) \otimes (q \otimes q)) \otimes (p \otimes q)$,

8. Zbadać, czy można za pomocą

- alternatywy i koniunkcji,
- alternatywy wykluczającej,

zdefiniować pozostałe funktory

Odp. a) nie, b) nie.

9. Określić dowolny funktor trójargumentowy, zbadać jego nieredukowalność i zdefiniować go za pomocą funktorów negacji i implikacji.

10. Wykazać prawa rachunku zdań

- PRZ1. $p \Leftrightarrow p$ – prawo tożsamości,
- PRZ2. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ – prawo przemienności alternatywy,
- PRZ3. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ – prawo przemienności koniunkcji,
- PRZ4. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$ – prawo przemienności równoważności,
- PRZ5. $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ – prawo łączności alternatywy,
- PRZ6. $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ – prawo łączności koniunkcji,
- PRZ7. $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ – prawo rozdz. alternatywy względem koniunkcji,
- PRZ8. $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ – prawo rozdz. koniunkcji względem alternatywy,
- PRZ9. $p \vee \neg p$ – prawo wyłączonego środka, prawo to wyraża zasadę, że z dwóch zdań sprzecznych, co najmniej jedno jest prawdziwe,
- PRZ10. $p \vee p \Leftrightarrow p$ – prawo idempotencji alternatywy,
- PRZ11. $p \wedge p \Leftrightarrow p$ – prawo idempotencji koniunkcji,
- PRZ12. $\neg \neg p \Leftrightarrow p$ – prawo podwójnej negacji,
- PRZ13. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ – prawo de Morgana,
- PRZ14. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ – prawo de Morgana,
- PRZ15. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ – prawo kontrapozycji,
- PRZ16. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$ – prawo przechodności implikacji,
- PRZ17. $((p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$ – prawo pochłaniania,
- PRZ18. $((p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$ – prawo pochłaniania,
- PRZ19. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$ – prawo odrywania (modus ponendo ponens),
- PRZ20. $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ – modus tollendo tollens,
- PRZ21. $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$ – modus ponendo tollens,
- PRZ22. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ – prawo eliminacji równoważności,
- PRZ23. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ – prawo eliminacji implikacji za pomocą negacji i alternatywy,
- PRZ24. $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ – prawo eliminacji koniunkcji za pomocą negacji i alternatywy,
- PRZ25. $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$ – prawo eliminacji alternatywy za pomocą negacji i implikacji,
- PRZ26. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \Rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ – prawo Fregego,
- PRZ27. $((p \wedge q) \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ – prawo eksportacji,
- PRZ28. $\neg(p \wedge \neg p)$ – prawo wyłączonej sprzeczności, prawo to wyraża zasadę, że z dwóch zdań sprzecznych co najmniej jedno jest fałszywe,
- PRZ29. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \Rightarrow p$ – prawo Pierce'a,
- PRZ30. $(\neg p \rightarrow p) \Rightarrow p$ – prawo Claviusa,
- PRZ31. $\neg p \Rightarrow (p \rightarrow q)$ – prawo Dunska-Scotusa,
- PRZ32. $(p \wedge q) \Rightarrow p$, – prawo pochłaniania dla koniunkcji,
- PRZ33. $p \Rightarrow (p \vee q)$, – prawo pochłaniania dla alternatywy,
- PRZ34. $p \Rightarrow (q \rightarrow p)$ – prawo symplifikacji,

PRZ35. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \Rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ – prawo komutacji,

PRZ36. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \Rightarrow (p \rightarrow q)$ – prawo skracania,

PRZ37. $(p \rightarrow q) \Rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)))$ – prawo mnożenia następników,

PRZ38. $(p \rightarrow r) \Rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$ – prawo dodawania poprzedników,

PRZ39. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \rightarrow 0)$ – reductio ad absurdum,

PRZ40. $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee s))$ – prawo dylematu konstrukcyjnego,

PRZ41. $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s))$ – prawo dylematu konstrukcyjnego,

PRZ42. $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((\neg q \vee \neg s) \rightarrow (\neg p \vee \neg r))$ – prawo dylematu destrukcyjnego,

PRZ43. $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((\neg q \wedge \neg s) \rightarrow (\neg p \wedge \neg r))$ – prawo dylematu destrukcyjnego.

11. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami.

a) $((p \wedge \neg p) \vee q) \leftrightarrow q$;

b) $((p \wedge \neg p) \wedge q) \leftrightarrow p$;

c) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \vee q)$;

d) $((p \vee q) \wedge r) \rightarrow (p \wedge \neg q)$;

e) $((p \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \rightarrow (\neg q \wedge p)$;

f) $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$;

g) $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$;

h) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$;

i) $((p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee s) \wedge (r \vee s)) \leftrightarrow ((p \wedge s) \vee (q \wedge r))$ (odp.: T) (w);

j) $((p \vee q) \wedge (r \vee s)) \rightarrow (((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \wedge ((q \rightarrow s) \vee (q \rightarrow p)))$ (odp.: N).

12. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami. Zapisać je za pomocą implikacji i negacji

a) $((p \wedge \neg q) \otimes q) \leftrightarrow p$;

b) $(p \rightarrow (q \otimes r)) \rightarrow (p \therefore q)$;

c) $((p \wedge q) \rightarrow r) \otimes ((p \rightarrow r) \therefore (q \rightarrow r))$

13. Zbadać, które funktory dwuargumentowe są:

a) przemienne;

b) łączne;

c) przechodnie.

14. Zbadać, czy podane zdania są prawdziwe. Utworzyć dla nich zdania odwrotne i przeciwstawne.

a) Jeśli $20 < 10$, to $20 < 100$. (T)

b) Jeśli $2 + 2 = 5$, to $2 + 4 = 6$.

c) Jeśli dzisiaj jest środa, to jutro jest czwartek. (T)

d) Jeżeli figura A jest czworokątem i A ma wszystkie kąty równe, to z faktu, iż A jest czworokątem, wynika, iż A ma boki równe.

e) Jeżeli liczba a dzieli się przez 3 i dzieli się przez 5, to z faktu, iż nie dzieli się przez 3, wynika, iż nie dzieli się przez 5.

f) Jeżeli Jan nie zna logiki to, jeśli Jan zna logikę, to Jan urodził się w IV wieku p.n.e.

g) Jeżeli z faktu, iż funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , wynika, że jest ona ciągła w punkcie x_0 , to z faktu, iż funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , wynika, iż jest ona różniczkowalna w punkcie x_0 .

- h) Jeżeli 7 jest dzielnikiem 43, to $1 = 2$.
 i) Jeżeli 2 dzieli 8 i 3 dzieli 8, to 6 dzieli 8.
 j) Jeżeli 2 dzieli 8 lub 3 dzieli 8, to 6 dzieli 8.

15. Udowodnić, że jeżeli formuła α jest tautologią, to formuły

- (a) $\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \alpha) \dots)$;
 (b) $\neg \alpha \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \dots))$

są również tautologiami.

16. Z badać, czy podane formuły są twierdzeniami *KRZ* wynikającymi z pierwszego lub drugiego układu aksjomatów (dowody dedukcyjne).

- a) $p \vee \neg p$ (prawo wyłączonego środka) (w),
 b) $\neg(p \wedge \neg p)$ (prawo wyłączonej sprzeczności) (w),
 c) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (prawo symplifikacji);
 d) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ (prawo Claviusa);
 e) $(p \vee p) \leftrightarrow p$ (prawo idempotencji alternatywy);
 f) $(p \wedge q) \rightarrow p$;
 g) $(p \wedge p) \leftrightarrow p$ (prawo idempotencji koniunkcji);
 h) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow p)$;

Pierwszy układ aksjomatów *KRZ*:

- (A1) $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ – aksjomat symplifikacji,
 (A2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ – aksjomat Fregego,
 (A3) $\neg \alpha \Rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ – aksjomat Duns Scotusa,
 (A4) $(\neg \alpha \rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$ – aksjomat Claviusa,

gdzie α, β, γ są dowolnymi formułami *KRZ*.

Drugi układ aksjomatów *KRZ*:

- (a1) $(\alpha \vee \alpha) \Rightarrow \alpha$ – aksjomat słabej idempotentności;
 (a2) $\alpha \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$ – aksjomat wprowadzenia alternatywy;
 (a3) $(\alpha \vee \beta) \Rightarrow (\beta \vee \alpha)$ – aksjomat słabej przemienności;
 (a4) $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow [(\gamma \vee \alpha) \rightarrow (\gamma \vee \beta)]$ – aksjomat alternatywnego uzupełnienia,

gdzie α, β, γ są dowolnymi formułami *KRZ*.

Rozwiązanie: c) Formuła $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ jest jednym z aksjomatów z pierwszego ich zbioru, a więc jest ona prawdziwa. Wykażemy, że formuła ta jest twierdzeniem *KRZ* przy drugim zbiorze aksjomatów. Dowód formalny jest następujący:

- (1) $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow [(\gamma \vee \alpha) \rightarrow (\gamma \vee \beta)]$ – aksjomat (a4);
 (2) $[(p \vee \neg q) \rightarrow (\neg q \vee p)] \Rightarrow [(\neg p \vee (p \vee \neg q)) \rightarrow (\neg p \vee (\neg q \vee p))]$ – z (1) przez podstawienia: $\alpha = p \vee \neg q$, $\beta = \neg q \vee p$, $\gamma = \neg p$;
 (3) $(p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg q \vee p)$ – aksjomat (a3) przez podstawienie $\alpha = p$, $\beta = \neg q$;
 (4) $(\neg p \vee (p \vee \neg q)) \rightarrow (\neg p \vee (\neg q \vee p))$ – z (2) i (3) przez zastosowanie RO;
 (5) $(p \rightarrow (p \vee \neg q)) \rightarrow (p \rightarrow (\neg q \vee p))$ – inny zapis (4);
 (6) $p \Rightarrow (p \vee \neg q)$ – aksjomat (a2) przez podstawienie $\alpha = p$, $\beta = \neg q$;
 (7) $p \rightarrow (\neg q \vee p)$ – z (5) i (6) przez zastosowanie RO;

$$(8) \quad p \rightarrow (q \rightarrow p) \quad \text{– inny zapis (7).}$$

Stąd formuła $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ jest twierdzeniem na gruncie drugiego zbioru aksjomatów.

17. Udowodnić, że dla liczb naturalnych prawdziwe jest twierdzenie:

a) Jeżeli x jest liczbą parzystą, to x^2 jest liczbą parzystą.

b) Jeżeli x^2 jest liczbą parzystą, to x jest liczbą parzystą.

a) Dowód wprost. Zakładamy, że x jest liczbą parzystą. Z definicji liczby parzystej, istnieje liczba naturalna y taka, że $x = 2y$. Stąd ich kwadraty też są równe, tj. $x^2 = (2y)^2$. Ponieważ

$$(2y)^2 = (2y)(2y) = 2(2y^2),$$

więc $x^2 = 2(2y^2)$, czyli istnieje liczba naturalna $z = 2y^2$ taka, że $x^2 = 2z$. Stąd z definicji liczby parzystej, liczba x^2 jest parzysta.

b) Dowód przez kontrapozycję. Zamiast wyjściowego twierdzenia dowodzimy twierdzenie

„Jeżeli x nie jest liczbą parzystą, to x^2 nie jest liczbą parzystą”.

Niech x będzie dowolną liczbą nieparzystą. Wówczas istnieje liczba naturalna y taka, że $x = 2y + 1$. Podnosząc do kwadratu obydwie strony, mamy

$$x^2 = (2y + 1)^2 = 4y^2 + 4y + 1 = 2(2y^2 + 2y) + 1$$

stąd istnieje $z = 2y^2 + 2y$ takie, że $x^2 = 2z + 1$. Z definicji liczb nieparzystych stwierdzamy, że liczba x^2 jest nieparzysta. Ostatecznie na mocy prawa kontrapozycji i reguły odrywania stwierdzamy, że x jest liczbą parzystą.

18. Zapisać prawa rachunku zdań w postaci prefiksowej i postfiksowej.

19. Dane są formuły w postaci infiksowej:

a) $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$;

b) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$;

c) $((p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee s) \wedge (r \vee s)) \leftrightarrow ((p \wedge s) \vee (q \wedge r))$;

d) $((p \vee q) \wedge (r \vee s)) \Rightarrow (((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \wedge ((q \rightarrow s) \vee (q \rightarrow p)))$.

e) $((p \wedge \neg q) \otimes q) \leftrightarrow p$;

f) $(p \rightarrow (q \otimes r)) \rightarrow (p \therefore q)$;

g) $((p \wedge q) \rightarrow r) \otimes ((p \rightarrow r) \therefore (q \rightarrow r))$.

Wyznaczyć: i) formuły równoważne w postaci AK i KA ,

ii) formuły równoważne możliwie najkrótszej długości,

iii) formuły w notacji polskiej i odwrotnej notacji polskiej.

20. Zapisać w symbolice infiksowej następujące formuły. Sprawdzić, czy są one tautologiami.

a) $\leftrightarrow \neg \wedge \neg p \neg q \vee pq$;

b) $\leftrightarrow \wedge pq \neg \rightarrow p \neg q$;

c) $pq \rightarrow pq \wedge \neg \vee$;

d) $\leftrightarrow \wedge p \vee qr \vee \wedge pq \wedge pr$;

- e) $\rightarrow \rightarrow pq \rightarrow \neg q \neg p$;
 f) $\vee \wedge pq \neg \neg \vee q \neg r$;
 g) $\rightarrow \neg \wedge pq \wedge \neg pq$;
 h) $\rightarrow \wedge \wedge \rightarrow pq \rightarrow rs \vee pr \vee qs$
 i) $\rightarrow \vee \vee \wedge pq \wedge p \neg q \vee \wedge \neg pq \neg p \neg q$.

21. Wykazać, że podane schematy, są regułami wnioskowania logicznego:

$$\text{a) } \frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}, \frac{p \rightarrow q}{(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)}, \frac{q \rightarrow r}{(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)}, \frac{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q}{p \rightarrow r}$$

(reguły sylogizmu warunkowego);

$$\text{b) } \frac{p}{q \rightarrow p} \text{ (reguła symplifikacji).}$$

$$\text{c) } \frac{p \rightarrow (q \rightarrow r)}{(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)} \text{ (reguła Fregego);}$$

$$\text{d) } \frac{\neg p}{p \rightarrow q} \text{ (reguła Duns Scotusa);}$$

$$\text{f) } \frac{\neg p \rightarrow p}{p} \text{ (reguła Claviusa);}$$

$$\text{g) } \frac{\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)}{p}, \frac{\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (r \wedge \neg r)}{p \rightarrow q}, \frac{(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg r)}{p \rightarrow q}, \frac{(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg p}{p \rightarrow q},$$

$$\frac{(p \wedge \neg q) \rightarrow q}{p \rightarrow q} \text{ (reguły apagogiczne).}$$

22. Zbadać, czy podane schematy są regułami wnioskowania logicznego.

$$\text{a) } \frac{p \rightarrow q, \neg q}{\neg p} \text{ (reguła modus tollens),}$$

$$\text{b) } \frac{p, p \rightarrow (r \vee s), r \rightarrow q, s \rightarrow q}{q},$$

$$\text{c) } \frac{p \vee q, p \rightarrow (r \wedge \neg r)}{q} \text{ (reguła eliminacja przypadku),}$$

$$\text{d) } \frac{\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)}{p} \text{ (reguła reductio ad absurdum),}$$

$$\text{e) } \frac{\neg p \rightarrow \neg q, p}{q} \text{ (reguła kontrapozycji).}$$

23. Zadanie Steinhausa¹ o grupach krwi. Ludzie dzielą się na cztery grupy krwi oznaczone w terminologii Dungerna i Hirszfelda symbolami O, A, B, AB . Podział ten określa, kto może w drodze transfuzji udzielić, komu swej krwi bez niebezpieczeństwa dla odbiorcy. Zdanie „jednostka należąca do grupy X może zawsze bez szkody udzielić swej krwi jednostce należącej do grupy Y ” oznaczamy symbolicznie $X \rightarrow Y$. Prawa transfuzji krwi można sformułować, jak następuje:

- I. $X \rightarrow X$ dla każdego X ,
- II. $O \rightarrow X$ dla każdego X ,
- III. $X \rightarrow AB$ dla każdego X ,
- IV. wszelka relacja $X \rightarrow Y$, która nie wynika z I, II, III, jest fałszywa.

Wykazać, że

- a) układ praw I-IV jest niesprzeczny,
- b) przy założeniu praw I-IV z $X \rightarrow Y$ i $Y \rightarrow Z$ wynika, że $X \rightarrow Z$ dla wszystkich X, Y, Z ,
- c) z I-IV wynika $\neg(A \rightarrow B)$.

Rozwiązanie. Symbol $X \rightarrow Y$ znaczy w tym zadaniu, że ktoś z grupą krwi X może być dawcą dla kogoś z grupą krwi Y . Za X i Y możemy podstawić każdy z czterech symboli grup krwi: O, A, B, AB . Z aksjomatów I-III wynika, że prawdziwe są następujące relacje:

$$O \rightarrow O, O \rightarrow A, O \rightarrow B, O \rightarrow AB, A \rightarrow A, A \rightarrow AB, B \rightarrow B, B \rightarrow AB, AB \rightarrow AB.$$

Jest ich 9 spośród 16 możliwych. Pozostałe relacje

$$A \rightarrow O, A \rightarrow B, B \rightarrow O, B \rightarrow A, AB \rightarrow O, AB \rightarrow A, AB \rightarrow B$$

są fałszywe w myśl aksjomatu IV. b) Udowodnimy przechodniość relacji „ \rightarrow ”, tzn. zdanie:

$$\text{jeśli } X \rightarrow Y \text{ i } Y \rightarrow Z, \text{ to } X \rightarrow Z.$$

Rozważymy wszystkie możliwe przypadki.

Jeśli $X = O$ i Y jest dowolne (to $X \rightarrow Y$) oraz Z takie, że $Y \rightarrow Z$, to prawo przechodniości jest spełnione, bo $X \rightarrow Z$ dla każdego Z .

Jeśli $X = A$, to możliwe są trzy przypadki:

- 1) $X = Y = Z = A$; 2) $X = Y = A$ i $Z = AB$; 3) $X = A$ i $Y = Z = AB$.

Po podstawieniu otrzymujemy trzy zdania:

- 1) jeśli $A \rightarrow A$ i $A \rightarrow A$, to $A \rightarrow A$,
- 2) jeśli $A \rightarrow A$ i $A \rightarrow AB$, to $A \rightarrow AB$,
- 3) jeśli $A \rightarrow AB$ i $AB \rightarrow AB$, to $A \rightarrow AB$,

wszystkie prawdziwe, podobnie jest w przypadku $X = B$.

Jeśli $X = AB$, to musi być $Y = AB$ i $Z = AB$, otrzymujemy w tym przypadku zdanie:

$$\text{Jeśli } AB \rightarrow AB \text{ i } AB \rightarrow AB, \text{ to } AB \rightarrow AB,$$

Również prawdziwe. Zatem przechodniość relacji „ \rightarrow ” została udowodniona.

¹ Hugo Dionizy Steinhaus (1887-1972) – matematyk polski. Od 1920 r. profesor Uniwersytetu Lwowskiego, od 1945 r. – Uniwersytetu Wrocławskiego, a od 1966 r. University of Sussex. Założył (1928) wspólnie z S. Banachem czasopismo matem. *Studia Mathematica* i czasopismo matem. *Zastosowania Matematyki* (1953). Popularyzator matematyki, autor *Kalejdoskopu Matematycznego*.

Ponieważ z przechodniości nie wynika żadna z pozostałych możliwych (fałszywych na mocy aksjomatu IV) siedmiu zależności, to układ aksjomatów I-IV nie może doprowadzić do dwóch twierdzeń sprzecznych, a więc jest niesprzeczny.

24. Wyznaczyć wykresy funkcji zdaniowych.

- a) $|x| \geq 1, X = \mathbf{C}$;
- b) $|x| < 4, X = \mathbf{R}^3$;
- c) $x \geq y \vee x^2 + y^2 \leq 1, X = Y = \mathbf{R}$;
- d) $\neg(x \cdot y < 1), X = Y = \mathbf{R}$;
- e) $x < |y| \rightarrow x^2 + y^2 \geq 0, X = Y = \mathbf{R}$;
- f) $x < |y| \leftrightarrow x + y \geq 0, X = Y = \mathbf{R}$;
- g) $x^3 + 1 > 0, X = Y = \mathbf{R}$;
- h) $x^2 \geq y, X = \mathbf{R}, Y = \mathbf{N}$;
- i) $x^2 + y^2 < 4 \wedge |z| < 1, X = Y = Z = \mathbf{R}$;
- j) $x^2 + y^2 = z^2, X = Y = Z = \mathbf{R}$.

25. Niech W_Φ, W_Ψ będą danymi wykresami funkcji zdaniowych Φ i Ψ mających te same zakresy zmienności. Znaleźć wykresy

- a) $W_{\neg\Phi}$,
- b) $W_{\Phi \wedge \Psi}$,
- c) $W_{\Phi \vee \Psi}$,
- d) $W_{\Phi \rightarrow \Psi}$,
- e) $W_{\Phi \leftrightarrow \Psi}$,
- f) $W_{\text{ani } \Phi \text{ ani } \Psi}$,
- g) $W_{\text{albo } \Phi \text{ albo } \Psi}$,
- h) $W_{\text{nie } \Phi \text{ lub nie } \Psi}$.

26. Znaleźć funkcje zdaniowe o wykresach:

- a) $W_\Phi \setminus W_\Psi$,
- b) $W_\Phi \times W_\Psi$, przy założeniu, że Φ i Ψ są funkcjami różnej zmiennej.

27. Niech $W_\Phi = W_\Psi = Z$ będzie wykresem funkcji zdaniowych Φ i Ψ mających ten sam zakres zmienności X . Znaleźć: a) $W_{\Phi \leftrightarrow \Psi}$, b) $W_{\Phi \wedge \Psi}$, c) $W_{\Phi \vee \neg \Psi}$, d) $W_{\text{ani } \Phi \text{ ani } \Psi}$.

Odp. a) Zbiór X (cały zakres zmienności); b), c), d) Z .

28. Niech $\Phi(x)$ będzie funkcją zdaniową prawdziwą w X , zaś $\Psi(x)$ dowolną funkcją zdaniową o wykresie Z . Wyznaczyć wykresy funkcji zdaniowych:

- a) $\Phi(x) \wedge \Psi(x)$;
- b) $\Phi(x) \vee \Psi(x)$;
- c) $\neg\Phi(x) \wedge \Psi(x)$;
- d) $\Phi(x) \rightarrow \Psi(x)$.

29. Określić funkcję zdaniową, której wykres jest przedstawiony graficznie.

30. Przyjmując, że formuły

a)
$$\forall_{x \in X} (\varphi(x) \vee \psi) \Leftrightarrow \forall_{x \in X} \varphi(x) \vee \psi,$$

b)
$$\forall_{x \in X} (\varphi(x) \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall_{x \in X} \varphi(x) \wedge \psi,$$

są prawami wykazać, że jeśli formuła ψ jest zdaniem lub funkcją zdaniową, w której nie występuje zmienna x , to podane formuły są prawami *KWRP* (prawa włączania i wyłączania kwantyfikatorów):

c)
$$\exists_{x \in X} (\varphi(x) \vee \psi) \Leftrightarrow \exists_{x \in X} \varphi(x) \vee \psi,$$

d)
$$\exists_{x \in X} (\varphi(x) \wedge \psi) \Leftrightarrow \exists_{x \in X} \varphi(x) \wedge \psi,$$

e)
$$\forall_{x \in X} (\varphi(x) \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\exists_{x \in X} \varphi(x) \rightarrow \psi),$$

f)
$$\exists_{x \in X} (\varphi(x) \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\forall_{x \in X} \varphi(x) \rightarrow \psi),$$

g)
$$\forall_{x \in X} (\psi \rightarrow \varphi(x)) \Leftrightarrow (\psi \rightarrow \forall_{x \in X} \varphi(x)),$$

h)
$$\exists_{x \in X} (\psi \rightarrow \varphi(x)) \Leftrightarrow (\psi \rightarrow \exists_{x \in X} \varphi(x)).$$

31. Z badać, czy podane formuły są prawami *KWRP*. Czy podane implikacje w b), d), e), f) można zastąpić równoważnościami ?

a)
$$\forall_{x \in X} (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow \forall_{x \in X} \varphi(x) \wedge \forall_{x \in X} \psi(x);$$

b)
$$(\forall_{x \in X} \varphi(x) \vee \forall_{x \in X} \psi(x)) \rightarrow \forall_{x \in X} (\varphi(x) \vee \psi(x));$$

c)
$$\exists_{x \in X} (\varphi(x) \vee \psi(x)) \Leftrightarrow \exists_{x \in X} \varphi(x) \vee \exists_{x \in X} \psi(x);$$

d)
$$\exists_{x \in X} (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow (\exists_{x \in X} \varphi(x) \wedge \exists_{x \in X} \psi(x));$$

e)
$$\forall_{x \in X} (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall_{x \in X} \varphi(x) \rightarrow \forall_{x \in X} \psi(x));$$

f)
$$\forall_{x \in X} (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\exists_{x \in X} \varphi(x) \rightarrow \exists_{x \in X} \psi(x)).$$

32. Przyjmując, że $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ są funkcjami zdaniowymi o zmiennych x, y, z wskazać zmienne wolne i zmienne związane w podanych formułach. Czy formuły te są zdaniami ?

a)
$$\exists_x \forall_y ((x < y) \rightarrow (x < z \wedge z < y)),$$

b)
$$\forall_x ((x|y \wedge y|z) \rightarrow x|z),$$

c)
$$\forall_x \forall_y \varphi(x, y, z) \wedge \exists_z \psi(x, y, z),$$

d)
$$\exists_x (\varphi(x, y, z) \rightarrow \psi(x, x, y)) \rightarrow \exists_x \exists_z (\varphi(x, x, y) \wedge \gamma(x, y, y)).$$

33. Znaleźć wykresy następujących funkcji zdaniowych:

a) $\exists_x xy = 1, X = Y = \mathbf{R}. \quad (\mathbf{R} - \{0\}).$

b) $\forall_x x^2 + y^2 = 1, X = Y = \mathbf{R}. \quad (\emptyset).$

c) $\exists_x x^2 + y^2 = z^2, X = Y = Z = \mathbf{R}.$

d) $\exists_x \forall_y xy = z, X = Y = Z = \mathbf{R}.$

e) $\forall_x \forall_y x^2 + y^2 \geq z, X = Y = Z = \mathbf{R}.$

34. Niech $\varphi(x, y)$ będzie funkcją zdaniową określoną dla liczb rzeczywistych. Podać sens geometryczny operacji prowadzących od wykresu funkcji $\varphi(x, y)$ do wykresów następujących funkcji:

a) $\forall_x \varphi(x, y), \quad b) \exists_x \varphi(x, y), \quad c) \forall_y \varphi(x, y), \quad d) \exists_y \varphi(x, y).$

Rozwiązania: Niech wykresem funkcji zdaniowej $\varphi(x, y)$ będzie zbiór $A \subseteq \mathbf{R}^2$. Wówczas

a) Wykres funkcji $\forall_x \varphi(x, y)$ otrzymujemy poprzez środkowanie zbioru A na oś Y .

b) Wykres funkcji $\exists_x \varphi(x, y)$ otrzymujemy poprzez rzutowanie zbioru A na oś Y .

c) Wykres funkcji $\forall_y \varphi(x, y)$ otrzymujemy poprzez środkowanie zbioru A na oś X .

d) Wykres funkcji $\exists_y \varphi(x, y)$ otrzymujemy poprzez rzutowanie zbioru A na oś X .

Uwaga. Środkowanie zbioru A na oś Y (na oś X) polega na znalezieniu największego pasa równoległego do osi X (do osi Y) całkowicie zawartego w A i znalezieniu następnie przecięcia tego pasa z osią Y (osią X).

35. Niech $x = y, x < y, x \leq y$ będą funkcjami zdaniowymi określonymi dla liczb naturalnych. Za ich pomocą oraz operacji arytmetycznych $(+, \cdot)$, symboli dla liczb i symboli logicznych zapisać podane funkcje zdaniowe i przedstawić je w postaci normalnej.

a) x jest liczbą parzystą.

b) x jest liczbą pierwszą.

c) x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb y i z .

d) x jest największym wspólnym dzielnikiem liczb y i z .

e) (Twierdz. Czebyszewa). Pomędzy liczbami n i $2n$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza.

f) (Hipoteza Goldbacha). Każda liczba nieparzysta większa od 3 rozkłada się na sumę dwóch liczb pierwszych.

g) Nie istnieje największa liczba naturalna.

Odp.

f) $\forall_u ((2u + 1 > 3 \rightarrow (\exists_p \exists_q \forall_y \forall_z ((p = yz \rightarrow p = y \vee 1 = y) \wedge (q = yz \rightarrow q = y \vee 1 = y)) \Rightarrow 2u + 1 = p + q))$

36. Zmienne w funkcjach zdaniowych $x = y$, $x < y$, $x \leq y$ przebiegają zbiór liczb rzeczywistych. Korzystając z tych funkcji oraz ze znanych operacji arytmetycznych zapisać za pomocą symboli logicznych podane zdania.

- Funkcja $f(x)$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
- Między dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi istnieje trzecia.
- Funkcja $f(x)$ jest malejąca.

37. Co oznaczają formuły ?

- $\forall_{n \in \mathbf{N}} \forall_{m \in \mathbf{N}} (n < m \rightarrow a_n < a_m)$;
- $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n \in \mathbf{N}} \forall_{k \in \mathbf{N}} \forall_{l \in \mathbf{N}} (k > n \wedge l > n \rightarrow |a_k - a_l| < \varepsilon)$;
- $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_n \forall_k (n > n_0 \rightarrow |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon)$, gdzie zakresem zmienności ε jest zbiór liczb rzeczywistych, a zakresem zmiennych n_0, k, n jest zbiór liczb naturalnych.
- $\exists_{x \in \mathbf{R}} \forall_{n \in \mathbf{N}} |a_n| < x$;
- $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in \mathbf{R}} (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$;
- $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in [a, b]} \forall_{y \in [a, b]} (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$;
- $\forall_{a_1} \dots \forall_{a_n} (a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \rightarrow a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0)$, gdzie zakresami zmienności zmiennych a_1, \dots, a_n jest zbiór liczb rzeczywistych stanowiący ciało, nad którym jest rozpięta przestrzeń liniowa;
- $\forall_{A \subseteq \mathbf{N}} ((1 \in A \wedge \forall_{k \in \mathbf{N}} (k \in A \rightarrow k + 1 \in A)) \rightarrow \forall_{n \in \mathbf{N}} n \in A)$, gdzie \mathbf{N} jest zbiorem liczb naturalnych.

38. Znaleźć alternatywną i koniunkcyjną postać normalną formuł (zakładamy, że formuły φ, ψ, γ są elementarne tj. nie zawierają spójników logicznych, nie poprzedza je spójnik negacji oraz kwantyfikator).

- $\forall_x \varphi(x) \vee \forall_x \psi(x)$,
- $\exists_x \varphi(x) \wedge \exists_x \psi(x)$,
- $\exists_x \varphi(x) \rightarrow \forall_x \psi(x)$,
- $\exists_x \varphi(x) \leftrightarrow \forall_x \psi(x, y)$,
- $\neg \exists_x (\varphi(x) \wedge \exists_y \psi(x, y))$,
- $\neg \forall_x (\exists_y \varphi(x, y) \rightarrow (\neg \forall_y \psi(x, y, z) \vee \forall_z \gamma(x, y, z)))$,
- $\exists_x (\forall_x \varphi(x, y) \vee \neg \exists_y (\psi(x, y) \vee \forall_z \gamma(z, x)))$.

39. Sprowadzić do postaci normalnej prawa *KWRP*.

40. Wykazać, że podane schematy są regułami dowodzenia *KWRP*

a) Reguła uogólniania

$$\frac{\varphi(x), x \in X}{\forall_{x \in X} \varphi(x)}$$

Regułę uogólniania stosuje się również dla kwantyfikatora o zakresie ograniczonym przez dowolną funkcję zdaniową $\psi(x), x \in X$.

b)
$$\frac{\forall_{x \in X} \varphi(x)}{\varphi(y), y \in X}$$

c)
$$\frac{\forall_{x \in X} \varphi(x)}{\exists_{x \in X} \varphi(x)}$$
,

d) Reguła łączenia kwantyfikatora ogólnego względem alternatywy

$$\frac{\forall_{x \in X} \varphi(x) \vee \forall_{x \in X} \psi(x)}{\forall_{x \in X} (\varphi(x) \vee \psi(x))}$$

e) Reguła rozkładania kwantyfikatora szczegółowego względem koniunkcji

$$\frac{\exists_{x \in X} (\varphi(x) \wedge \psi(x))}{\exists_{x \in X} \varphi(x) \wedge \exists_{x \in X} \psi(x)}$$

f) Reguła rozkładania kwantyfikatora ogólnego względem implikacji

$$\frac{\forall_{x \in X} (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))}{\forall_{x \in X} \varphi(x) \rightarrow \forall_{x \in X} \psi(x)}$$

g) Reguła rozkładania kwantyfikatora szczegółowego względem implikacji

$$\frac{\forall_{x \in X} (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))}{\exists_{x \in X} \varphi(x) \rightarrow \exists_{x \in X} \psi(x)}$$

h) Reguła przestawiania kwantyfikatorów

$$\frac{\exists_{x \in X} \forall_{y \in Y} \varphi(x, y)}{\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} \varphi(x, y)}$$

i) Reguła eliminacji kwantyfikatora ogólnego

$$\frac{\varphi \rightarrow \forall_{x \in X} \psi(x)}{\varphi \rightarrow \psi(x), x \in X}$$

j) Reguła eliminacji kwantyfikatora szczegółowego

$$\frac{\exists_{x \in X} \varphi(x) \rightarrow \psi}{\varphi(x) \rightarrow \psi, x \in X}$$

Dowody. a) Jeśli $\varphi(x), x \in X$, jest funkcją zdaniową prawdziwą w X , to dla każdego $x \in X$ prawdziwe jest zdanie $\varphi(x)$, co dowodzi, że zdanie $\forall_{x \in X} \varphi(x)$ jest prawdziwe.

b) Wynika z prawa dictum de omni i reguły modus ponens. Jeśli bowiem zdanie $\forall_{x \in X} \varphi(x)$ jest prawdziwe, to stosując regułę modus ponens do $\forall_{x \in X} \varphi(x)$ i do $\forall_{x \in X} \varphi(x) \rightarrow \varphi(y), y \in X$, otrzymujemy $\varphi(y), y \in X$.

c) Oczywisty.

d) Wynika z praw KWRP i reguły modus ponens.

e) Wynika z praw KWRP i reguły modus ponens.

f) Wynika z praw rozkładania kwantyfikatorów oraz reguły modus ponens.

g) Wynika z praw rozkładania kwantyfikatorów oraz reguły modus ponens.

i) Wynika z prawa przestawiania kwantyfikatorów i reguły modus ponens.

j) Na mocy prawa

$$\varphi(y) \Rightarrow \exists_{x \in X} \varphi(x), y \in X$$

prawdziwa jest funkcja zdaniowa

$$\varphi(x) \rightarrow \exists_{x \in X} \varphi(x), x \in X.$$

Jeśli prawdziwe jest zdanie

$$\exists_{x \in X} \varphi(x) \rightarrow \psi,$$

to stosując regułę sylogizmu warunkowego otrzymujemy

$$\varphi(x) \rightarrow \psi, x \in X.$$

Dowodzi to, że podany schemat jest regułą dowodzenia.