PROBLEMY I ZADANIA TM (1-31)

II. PODSTAWY TEORII MNOGOŚCI

1. Wykazać, że $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

2. Sprawdzić, czy dla dowolnych zbiorów *X*, *Y*, *Z* prawdziwe są podane formuły teoriomnogościowe.

a) $\{X,Y\} \in \{\{X,Y,Z\},\{X,Z\},X,Y\}$,

b) $\{X,Y\} \subseteq \{\{X,Y,Z\},\{X,Z\},X,Y\}$.

3. Podstawowe własności inkluzji. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów *X*, *Y*, *Z* zachodzą następujące własności:

a) $X \subseteq X$ – zwrotność;

b) Jeżeli $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq X$, to $X = Y$ – słaba antysymetria;

c) Jeżeli $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq Z$, to $X \subseteq Z$ – przechodniość.

4. Podstawowe własności inkluzji właściwej. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów *X*, *Y*, *Z* zachodzą następujące własności:

a) $\neg X \subset X$ – przeciwzwrotność;

b) $(X \subset Y) \to \neg(Y \subset X)$ – mocna antysymetria;

c) $(X \subset Y \wedge Y \subset Z) \to X \subset Z$ – przechodniość.

5. Zbadać, czy dla dowolnych zbiorów *X*, *Y*, *Z* prawdziwe są zdania:

a) $(X \notin Y \wedge Y \notin Z) \to X \notin Z$;

b) $(X \in Y \wedge Y \subseteq Z) \to \neg(Z \subseteq X)$; (w)

c) $(X \in Y \wedge Y \subseteq Z) \to \neg(X \subseteq Z)$;

d) $(X \in Y \wedge Y \subseteq Z) \to (X \subseteq Z)$;

e) $(X \subseteq Y \wedge Y \in Z) \to (X \subseteq Z)$.

6. Zbadać, czy dla dowolnych zbiorów *A*, *B* i *C* prawdziwe są zdania:

a) $(A \in B \wedge B \in C) \to (A \in C)$;

b) $(A \subseteq B \wedge B \in C) \to (A \in C)$;

c) $(A \cap B \subseteq C' \wedge A \cup C \subseteq B) \to (A \cap C = \varnothing)$;

d) $(A \neq B \wedge B \neq C) \to A \neq C$;

e) $\big(A \subseteq (B \cup C') \wedge B \subseteq (A \cup C)'\big) \to B = \varnothing$. (N) Wystarczy wziąć trzy parami rozłączne niepuste zbiory.

7. Podać przykład zbioru czteroelementowego, którego każdy element jest jego podzbiorem.

8. Zbadać, czy prawdziwe są formuły:

a) $\forall_A \varnothing \subseteq A$;

b) $\exists_A \varnothing \subset A$.

Odp.: a) Dla dowolnego zbioru *A* zachodzi $\{x \in A\colon \Phi(x)\} \subseteq A$. Podstawiając w miejsce formuły $\Phi(x)$ funkcję zdaniową $x \neq x$, otrzymujemy $\varnothing = \{x \in A\colon x \neq x\} \subseteq A$.

b) Każdy niepusty zbiór *A* zawiera jako podzbiór właściwy zbiór pusty.

9. Podać wszystkie elementy i podzbiory zbioru:
a) $\varnothing$; elementów nie ma, jedynym podzbiorem jest zbiór $\varnothing$;
b) $\{\varnothing\}$; zbiór $\varnothing$ jest równocześnie podzbiorem i elementem;
c) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; jedynymi elementami są $\varnothing$ i $\{\varnothing\}$, podzbiorami są $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

10. Znaleźć zbiór 2^X jeżeli:

a) $X = \{1, 2, 3\}$;
b) $X = \varnothing$;
c) $X = \{\varnothing\}$.

11. Ile elementów ma zbiór 2^{2^X}, jeżeli X jest zbiorem n-elementowym ?

12. Znaleźć wszystkie elementy zbioru 2^{2^X}, jeżeli:

a) $X = \varnothing$;
b) $X = \{\varnothing\}$,
c) $X = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

13. Podstawowe prawa algebry zbiorów dla operacji sumy i iloczynu.
Wykazać, że dla wszelkich zbiorów *A*, *B*, *C*, *D* zachodzą prawa:

a) $A \cup A = A \cap A = A$ – prawo idempotencji dodawania i mnożenia zbiorów;
b) $A \cup B = B \cup A$ – prawo przemienności dodawania zbiorów;
c) $A \cap B = B \cap A$ – prawo przemienności mnożenia zbiorów;
d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania zbiorów; (w)
e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia zbiorów;
f) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – prawo łączności dodawania zbiorów;
g) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ – prawo łączności mnożenia zbiorów;
h) $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A$;
i) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;
j) $A \cup \varnothing = A$ – prawo neutralności zbioru $\varnothing$ względem dodawania.

14. Wykazać, że przy ustalonym uniwersum *U* dla wszelkich zbiorów *A*, *B*, *C*, *D* zachodzą następujące równości:

a) $A \cup A' = U$;
b) $A \cap A' = \varnothing$;
c) $U \cup A = U$;
d) $U \cap A = A$ – prawo neutralności uniwersum względem mnożenia;
e) $A'' = A$ – prawo podwójnego dopełniania zbioru;
f) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B') = A$;
g) $(A' \cup B) \cap A = A \cap B$;

15. Wykazać, ze przy ustalonym uniwersum *U* dla wszelkich jego podzbiorów *A*, *B*, *C* zachodzą następujące równości:

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ – prawo de Morgana;
b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ – prawo de Morgana (w);
c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

e) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
f) $(A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
g) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;
h) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
i) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;
j) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
k) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
l) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

16. Wykazać własności:

a) $A \subseteq B \to A \cup C \subseteq B \cup C$;
b) $A \subseteq B \to A \cap C \subseteq B \cap C$;
c) $A \subseteq B \to A \setminus C \subseteq B \setminus C$;
d) $A \subseteq B \to C \setminus B \subseteq C \setminus A$;
e) $A \subseteq B \to B' \subseteq A'$;
f) $A \cup B = A \cap B \to A = B$;
g) $A \setminus B = B \setminus A \to A = B$;
h) $A = B' \leftrightarrow (A \cap B = \varnothing \wedge A \cup B = U)$;
i) $A \cup B \subseteq C \leftrightarrow (A \subseteq C \wedge B \subseteq C)$;
j) $A \subseteq B \cap C \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$;
k) $A \cap B \subseteq C \leftrightarrow A \subseteq B' \cup C$; (w)
l) $A \subseteq B \cup C \leftrightarrow A \cap B' \subseteq C$;
m) $(A \setminus B) \cup B = A \leftrightarrow B \subseteq A$;
n) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \leftrightarrow C \subseteq A$;
o) $((A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)) \to (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$;
p) $((A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)) \to (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$;
q) $((A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)) \to (A \setminus D) \subseteq (B \setminus C)$;
r) $A \div B = \varnothing \leftrightarrow A = B$;
s) $A \cap B = \varnothing \to A \cup B = A \div B$;
t) $A \div B = C \leftrightarrow B \div C = A \leftrightarrow C \div A = B$.

17. Zbadać, jakie relacje inkluzji zachodzą miedzy zbiorami *A*, *B* i *C*, jeśli prawdziwa jest równość

a) $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$; (w)
b) $(A \cup B) \cap (C \cup B) = B$;
c) $(A \setminus C) \cup B = A \cup B$;
d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B)$;
e) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \cap C$;
f) $((A \cap B) \cup C) \setminus A = (A \cap B) \setminus C$;

Odp. a) $B \subseteq A \cup C$, b) $C \cap A \subseteq B$; c) $C \cap A \subseteq B$; d) $B \cap C = \varnothing$; e) $A \cup B \subseteq C$, $A \cap B = \varnothing$; f) $A \cap B \subseteq C \subseteq A$.

18. Wykazać równości zbiorów (dla dowolnych zbiorów *A*, *B*, *C*).

a) $A \div B = B \div A$;
b) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$;
c) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$;
d) $A \div (A \div B) = B$;
e) $A \cup B = A \div B \div (A \cap B)$;

f) $A \setminus B = A \div (A \cap B)$;
g) $A \div \varnothing = A$;
h) $A \div A = \varnothing$
i) $A \cup B = (A \div B) \cup (A \cap B)$.

19. Zdefiniować działania $\cup, \cap, \setminus$ za pomocą działań:
a) $\div, \cap$;
b) $\div, \cup$;
c) $\div, \setminus$.

20. Dowieść własności uogólnionej sumy i uogólnionego iloczynu zbiorów

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \setminus A_{i+1}) \cup (A_n \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$,

b) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcup_{i=1}^{m} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$,

c) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \div \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \div B_i)$, (w),

d) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \div \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \div B_i)$.

21. Wykazać własności podanych rodzin podzbiorów.
a) $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$;
b) $2^{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} 2^{A_i}$;
c) $2^{A \cup B} = \{A_1 \cup B_1 \colon A_1 \in 2^A, B_1 \in 2^B\}$; (w)
d) $2^{\bigcup_{i \in I} A_i} = \{\bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in 2^{A_i}\}$.

22. Rozwiązać układy równań teoriomnogościowych przyjmując, że zbiory *A*, *B* i *C* są dane.

a) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$ gdzie $B \subseteq A \subseteq C$, (w)

b) $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$ gdzie $B \subseteq A$, $A \cap C = \varnothing$,

c) $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \cup A = C \end{cases}$ gdzie $B \subseteq A \subseteq C$.

Odp.: b) $X = (A \setminus B) \cup C$, c) $X = C \setminus B$.

23. Znaleźć sumę i iloczyn indeksowanej rodziny zbiorów dla i) $t \in \mathbf{N}$, ii) $t \in \mathbf{R}^+$, gdzie $A_t \subseteq \mathbf{R}$ jest zbiorem określonym następująco:
a) $A_t = \{x : t \le x < t+1\}$;
b) $A_t = \{x : -t \le x \le t\}$;
c) $A_t = \{x : t \le x\}$;
d) $A_t = \{x : 0 \le x < 1/(t+1)\}$;
e) $A_t = \{x : -1/(t+1) < x \le 1/(t+1)\}$;
f) $A_t = \{x : t/(t+1) \le x < (t+1)/(t+2)\}$;

g) $A_t = \{x : t^2 < x < (t+1)^2\}$;

h) $A_t = \{x : \sin x = t\}$;

Odp. a) $\bigcup_{t\in\mathbf{N}} A_t = [1,\infty)$, $\bigcup_{t\in\mathbf{R}^+} A_t = (0,\infty)$, $\bigcap_{t\in\mathbf{N}} A_t = \bigcap_{t\in\mathbf{R}^+} A_t = \varnothing$;

b) $\bigcup_{t\in\mathbf{N}} A_t = \bigcup_{t\in\mathbf{R}^+} A_t = \mathbf{R}$, $\bigcap_{t\in\mathbf{N}} A_t = [-1,1]$; $\bigcap_{t\in\mathbf{R}^+} A_t = \{0\}$

24. Niech $A_{n,m} \subseteq \mathbf{R}$. Znaleźć $\bigcup_{n,m\in\mathbf{N}} A_{n,m}$, $\bigcap_{n,m\in\mathbf{N}} A_{n,m}$, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\bigcap_{m\in\mathbf{N}} A_{n,m}$, $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\bigcup_{m\in\mathbf{N}} A_{n,m}$ jeżeli:

a) $A_{n,m} = \{x : n^2 \le x < m^2\}$;

b) $A_{n,m} = \{x : n \le x < m\}$.

Znaleźć $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\bigcap_{m\in\mathbf{N}} A_{n,m}$, $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\bigcup_{m\in\mathbf{N}} A_{n,m}$, $\bigcup_{m\in\mathbf{N}}\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_{n,m}$, $\bigcap_{m\in\mathbf{N}}\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_{n,m}$, jeżeli

c) $A_{n,m} = \{x : n^2 \le x < m^2 + (n+1)^2\}$.

Wskazówka. Dla indeksów naturalnych zestawić elementy rodziny zbiorów w macierz.

25. Dowieść, ze przy ustalonym uniwersum U zachodzą równości

a) $(\bigcup_{t\in I} A_t)' = \bigcap_{t\in I} A'_t$ – prawo de Morgana dla uogólnionej sumy zbiorów,

b) $(\bigcap_{t\in I} A_t)' = \bigcup_{t\in I} A'_t$ – prawo de Morgana dla uogólnionego iloczynu.

26. Udowodnić prawdziwość podanych formuł teoriomnogościowych.

a) $\bigcup_{t\in I}(A_t \cup B_t) = \bigcup_{t\in T} A_t \cup \bigcup_{t\in T} B_t$,

b) $\bigcap_{t\in T}(A_t \cap B_t) = \bigcap_{t\in T} A_t \cap \bigcap_{t\in T} B_t$,

c) $\bigcup_{t\in I}(A_t \cap B) = \bigcup_{t\in T} A_t \cap B$,

d) $\bigcap_{t\in T}(A_t \cup B) = \bigcap_{t\in T} A_t \cup B$,

e) $\bigcup_{k\in K}\bigcup_{t\in T} A_{k,t} = \bigcup_{t\in T}\bigcup_{t\in T} A_{k,t}$,

f) $\bigcap_{k\in K}\bigcap_{t\in T} A_{k,t} = \bigcap_{t\in T}\bigcap_{k\in K} A_{k,t}$,

g) $\bigcup_{k\in K}\bigcup_{t\in T}(A_k \cap B_t) = \bigcup_{k\in K} A_k \cap \bigcup_{t\in T} B_t$,

h) $\bigcap_{k\in K}\bigcap_{t\in T}(A_k \cup B_t) = \bigcap_{k\in K} A_k \cup \bigcap_{t\in T} B_t$.

27. Zbadać, czy prawdziwe są równości

a) $\bigcap_{t\in T}(A_t \cup B_t) = \bigcap_{t\in T} A_t \cup \bigcap_{t\in T} B_t$, (odp. tylko $\supset$)

b) $\bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{t\in T} B_t = \bigcup_{t\in T}(A_t \cap B_t)$, (odp. tylko $\supset$)

c) $\bigcup_{k\in K}\bigcap_{t\in T} A_{k,t} = \bigcap_{t\in T}\bigcup_{k\in K} A_{k,t}$, (odp. tylko $\subset$) (w)

d) $\bigcup_{t\in T}(A_t \setminus B_t) = \bigcup_{t\in T} A_t \setminus \bigcup_{t\in T} B_t$, (odp. tylko $\subset$).

28. Niech $A_1 = \{1\}, A_2 = \{1, 2\}, A_3 = \{2, 3\}$ oraz uniwersum jest zbiór liczb naturalnych.

a) Wskazać wszystkie składowe,
b) Podać elementy ciała $C(A_1, A_2, A_3)$,
c) Zbadać czy zbiory A_1, A_2, A_3 są niezależne.

29 Określić uniwersum *U*, wprowadzić w nim cztery zbiory niezależne i wykazać poprawność konstrukcji.

30. Podać przykład układu dwóch niezależnych zbiorów dwuelementowych zawartych w zbiorze $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Czy do układu tego można dołączyć jeszcze jeden zbiór dwuelementowy tak, aby te zbiory dalej były niezależne ?

31. Wykazać, że rodzina skończonych podzbiorów zbioru **N** i ich dopełnień stanowi ciało zbiorów.