PROBLEMY I ZADANIA TM (32-35)

III. INDUKCJA MATEMATYCZNA

32. Wykazać, że

$$\underset{n\in\mathbf{N}}{\forall}\ (n \subseteq Z \to n \in Z) \to \underset{n\in\mathbf{N}}{\forall}\ n \in Z$$

Dowód wynika z zasady minimum.

33. Sprawdzić, że

$$\underset{m,n\in\mathbf{N}}{\forall}\left(m \subseteq n \leftrightarrow \underset{k\in\mathbf{N}}{\exists}\ m+k=n\right)$$

34. Udowodnić, że:

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;

c) $\sum_{k=1}^{n} (4k-3) = n(2n-1)$

d) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

e) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

f) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$;

g) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

h) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

i) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{3n(n+1)-1}{5}$;

j) $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \frac{2n(n+1)-1}{3}$;

k) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$;

l) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$;

m) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$;

n) $\sum_{k=1}^{n} k!k = (n+1)! - 1$;

o) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(2k-1)^2=\frac{1}{2}\left((-1)^{n+1}(4n^2-1)-1\right)$;

p) $2^n>n$;

q) $2|(n^2+n)$;

r) $\binom{k}{l}+\binom{k}{l+1}=\binom{k+1}{l+1}$;

s) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$;

t) $\sum_{i=1}^{n}i\binom{n}{i}=n2^{n-1}$;

u) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$;

v) $\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{n}=\binom{n+m+1}{n+1}$.

Rozwiązanie. a) Niech

$$Z=\{n\in\mathbf{N}:\quad 1+2+...+n=n(n+1)/2\}$$

Sprawdzamy, czy zbiór Z jest indukcyjny. Łatwo zauważyć, że $1\in Z$. Zakładamy, że liczba naturalna $n\in Z$. Stąd

$$1+2+...+n=n(n+1)/2$$

Dodając do obu stron równości następnik $S(n)=n+1$ otrzymujemy:

$$1+2+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

czyli wykazaliśmy, że $n+1\in Z$. Stąd równość zachodzi dla wszystkich naturalnych *n*.

p) Niech

$$Z=\{n\in\mathbf{N}:\quad 2^n>n\}$$

Sprawdzamy, czy zbiór Z jest indukcyjny. Ponieważ $2^1>1$, więc $1\in Z$. Zakładamy, że liczba naturalna $n\in Z$. Stąd $2^n>n$. Mnożąc obie strony tej nierówności przez 2 otrzymujemy

$$2^{n+1}>2n=n+n>n+1$$

Stąd podany zbiór Z jest indukcyjny.

35. Obliczyć $2\cup 3, 2\cap 3, 1\cup n, n\cup 1, 2', n\cup k, n\cap k, 2\div 3$.