PROBLEMY I ZADANIA TM (36-42)

IV. ILOCZY NY KARTEZJAŃSKIE

36. Zbadać, czy iloczyn kartezjański dowolnych zbiorów jest przemienny i łączny.

37. Dowieść, że jeśli zbiory A, B, C i D są niepuste to:

a) $(A \subseteq B \ \wedge\ C \subseteq D) \ \leftrightarrow\ (A \times C \subseteq B \times D)$;

b) $(A = B \ \wedge\ C = D) \ \leftrightarrow\ (A \times C = B \times D)$;

c) $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \rightarrow (A \times B = (A \times D) \cap (C \times B))$.

38. Wykazać własności:

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$,

b) $\bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i)$,

c) $\bigtimes_{j \in \mathbf{N}} \bigcap_{i \in I} A_{ij} = \bigcap_{i \in I} \bigtimes_{j \in \mathbf{N}} A_{ij}$,

d) $\bigcup_{k \in K} A_k \times \bigcup_{t \in T} B_t = \bigcup_{(k,t) \in K \times T} (A_k \times B_t)$,

e) $\bigcap_{k \in K} A_k \times \bigcap_{t \in T} B_t = \bigcap_{(k,t) \in K \times T} (A_k \times B_t)$.

39. Sporządzić wykresy zbiorów $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$, $(A \cup B) \times C$, $A \times (B \cup C)$ $(A \setminus B) \times C$, jeżeli zbiory $A, B, C \subset \mathbf{R}$ są postaci:

a) $A = [-1, 1]$, $B = (0, 2)$, $C = \{0, 2\}$;

b) $A = [-1, 1]$, $B = \mathbf{Z}$, $C = [0, 2]$.

40. Przyjąć odpowiednie założenia i wykazać podane własności. Sformułować i udowodnić ich uogólnienia.

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

c) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \times D)$, kiedy zachodzi równość ? (w)

d) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

e) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Wskazówka. a) Uogólnienie: $\left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \times Y = \bigcup_{i \in I} (X_i \times Y)$

41. Przyjąć odpowiednie założenia dotyczące relacji i wykazać własności.

a) $D_1(R) = \emptyset \ \Leftrightarrow\ R = \emptyset \ \Leftrightarrow\ D_2(R) = \emptyset$;

b) $D_1(R^{-1}) = D_2(R)$; $\quad D_2(R^{-1}) = D_1(R)$;

c) $D_1(R_2 \circ R_1) = R_1^{-1}(D_2(R_1) \cap D_1(R_2))$; (w)

d) $D_2(R_2 \circ R_1) = R_2(D_2(R_1) \cap D_1(R_2))$; (w)

42. Wykazać własności

a) $\forall_B ((B \neq \emptyset) \rightarrow D_1(A \times B) = A)$,

b) $\forall_A (A \neq \emptyset \rightarrow D_2(A \times B) = B)$.