PROBLEMY I ZADANIA TM (116-141)

IX. MOCE ZBIORÓW I LICZBY KARDYNALNE

116. (Zadanie Steinhausa mister intelektu). W słowniku znajduje się milion wyrazów. Czy można odgadnąć wyraz z tego słownika stawiając 20 pytań, na które odpowiedź będzie tak lub nie ?

Rozwiązanie. Każdą liczbę naturalną można w układzie dwójkowym napisać za pomocą dwóch cyfr 0 i 1, tj. w postaci

$$\sum_{i=0}^{n} a_i 2^i \text{ , gdzie } a_i \text{ jest zerem lub jedynką.}$$

Największą liczbą napisaną za pomocą 20 jedynek jest

$$\sum_{i=0}^{19} 2^i = 2^{20} - 1 = 1048775$$

Wszystkie hasła w słowniku ponumerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi i załóżmy, że w słowniku jest nie więcej niż 1048575. Kolejne 20 pytań może być takie:

„Czy *i*-ta kolejna cyfra numeru hasła w systemie dwójkowym jest jedynką ?”

Po dwudziestu kolejnych pytaniach numer hasła jest ustalony, a więc żądane ze słownika hasło odnalezione.

117. Ile liczb naturalnych ze zbioru $\mathbf{N}_{1000}$ dzieli się przez 3 lub 5, lub przez obie te liczby ?

Rozwiązanie. Niech $D_k(\mathbf{N}_{1000}) = \{n \in \mathbf{N}_{1000} : k | n\}$, $k = 3, 5$. Mamy wówczas

$$\overline{\overline{D_3(\mathbf{N}_{1000}) \cup D_5(\mathbf{N}_{1000})}} = \overline{\overline{D_3(\mathbf{N}_{1000})}} + \overline{\overline{D_5(\mathbf{N}_{1000})}} - \overline{\overline{D_3(\mathbf{N}_{1000}) \cap D_5(\mathbf{N}_{1000})}} =$$

$$\lfloor 1000/3 \rfloor + \lfloor 1000/5 \rfloor - \lfloor 1000/15 \rfloor = 333 + 200 - 66 = 467$$

gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby *x*.

118. Wyprowadzić wzór na moc skończonej sumy zbiorów skończonych, tj. niech uniwersum *U* będzie zbiorem skończonym oraz niech $A_1, A_2, ..., A_n$ będą podzbiorami uniwersum *U*. Wówczas

$$\overline{\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}} = ?$$

119. Wykazać podane własności zbiorów przeliczalnych.

a) Podzbiór *B* zbioru przeliczalnego *A* jest zbiorem przeliczalnym

$$(\overline{\overline{A}} \leq \aleph_0 \wedge B \subseteq A) \to \left(\overline{\overline{B}} \leq \aleph_0\right)$$

b) Suma dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym

$$(\overline{\overline{A}} \leq \aleph_0 \ \wedge \ \overline{\overline{B}} \leq \aleph_0) \to \left(\overline{\overline{A \cup B}} \leq \aleph_0\right)$$

c) Suma dowolnej skończonej ilości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym

$$\underset{n\in\mathbf{N}}{\forall}\ \underset{i=1,\dots,n}{\forall}\left(\overline{\overline{A_i}} \le \aleph_0 \to \overline{\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}} \le \aleph_0\right)$$

d) Przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym

$$\underset{J}{\forall}\ \underset{j\in J}{\forall}\left((\overline{\overline{J}} \le \aleph_0 \wedge \overline{\overline{A_j}} \le \aleph_0\,) \to \overline{\overline{\bigcup_{j\in J} A_j}} \le \aleph_0\right)$$

e) Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym

$$(\,\overline{\overline{A}} \le \aleph_0 \wedge \overline{\overline{B}} \le \aleph_0\,) \to \overline{\overline{A\times B}} \le \aleph_0$$

f) Skończony iloczyn kartezjański zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym

$$\underset{n\in\mathbf{N}}{\forall}\ \underset{i=1,\dots,n}{\forall}\left(\overline{\overline{A_i}} \le \aleph_0 \to \overline{\overline{\underset{i=1,\dots,n}{\times} A_i}} \le \aleph_0\right)$$

g) Zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach należących do danego zbioru przeliczalnego jest przeliczalny.

Dowody. a) Jeżeli A jest zbiorem skończonym to dowód wynika z 9.4. a). Niech A będzie zbiorem przeliczalnym nieskończonym. Jeżeli B jest zbiorem pustym lub skończonym to jest zbiorem przeliczalnym. Pozostaje wykazać, że zbiór B jest również przeliczalny, jeśli jest nieskończony. Ponieważ zbiór A jest z założenia zbiorem przeliczalnym nieskończonym, więc istnieje bijekcja $f:\mathbf{N}\to A$ ustawiająca elementy zbioru A w ciąg $\{a_1,a_2,...\}$, gdzie $a_i = f(i)$. Ponieważ $f^{-1} * B \subseteq \mathbf{N}$ i funkcja odwrotna jest jednoznaczna, więc B jest zbiorem przeliczalnym.

b) Jeżeli jeden z danych zbiorów jest pusty, to oczywiście ich suma jest zbiorem przeliczalnym. Więc załóżmy, że oba zbiory są niepuste i przeliczalne, wówczas elementy każdego z tych zbiorów można ustawić w ciąg skończony lub nieskończony

$$A=\{\,a_1\,,a_2\,,\dots\},\quad B=\{\,b_1\,,b_2\,,\dots,\}\,.$$

Istnieją funkcje

$$f:\ \mathbf{N}\underset{na}{\to}A \ \text{ i } \ g\!:\ \mathbf{N}\underset{na}{\to}B$$

Zauważmy, że funkcja $h:\ \mathbf{N}\to A\cup B$ określona dla $n\in\mathbf{N}$ wzorem:

$$h(2n-1) = f(n) \ \text{ i } \ h(2n) = g(n)$$

ustawia wszystkie elementy sumy tych zbiorów w ciąg przeplatany

$$A\cup B=\{\,a_1\,,b_1\,,a_2\,,b_2\,,\dots\}\,.$$

Stąd suma zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

c) Wynika z b) przez indukcję.

d) Jeżeli zbiór indeksów J jest skończony to patrz wyżej. Jeżeli $J\cong\mathbf{N}$ to zbiory A_j, $j\in J$ można również poindeksować liczbami naturalnymi. Wówczas wystarczy wykazać, że $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ jest zbiorem przeliczalnym. Załóżmy, że dla każdego $n\in\mathbf{N}$ zbiór A_n jest przeliczalny. Wykażemy, że $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ jest zbiorem przeliczalnym. Z założenia dla każdego $n\in\mathbf{N}$ istnieje funkcja $f_n:\mathbf{N}\underset{na}{\to} A_n$. Określamy funkcję

$$g:\ \mathbf{N}^2\to\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$$

wzorem $g(n,m)=f_n(m)$. Ponieważ każda z funkcji f_n jest surjekcją, więc funkcja g przekształca zbiór $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ na sumę $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$. Złożenie funkcji g z funkcją odwrotną do funkcji pary J (patrz wykład lub przykład) jest więc surjekcją:

$$g\circ J^{-1}:\ \mathbf{N}\to\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\ ,$$

stąd zbiór $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ jest przeliczalny.

e) W dowodzie implikacji $(\overline{\overline{A}}\le\aleph_0\wedge\overline{\overline{B}}\le\aleph_0)\Rightarrow\overline{\overline{A\times B}}\le\aleph_0$ korzystamy z funkcji pary $J_{2\times1}(x,y)$, która jest bijekcją między zbiorami $\mathbf{N}_0\times\mathbf{N}_0$ i $\mathbf{N}_0$, więc ustala moc $\overline{\overline{\mathbf{N}_0\times\mathbf{N}_0}}=\aleph_0$. Niech teraz A i B będą dowolnymi zbiorami przeliczalnymi, tj. $\overline{\overline{A}}\le\aleph_0\wedge\overline{\overline{B}}\le\aleph_0$, Wówczas istnieją iniekcje

$$f:A\to\mathbf{N}_0,\ g:B\to\mathbf{N}_0$$

Przekształcenie $h:\ A\times B\to\mathbf{N}_0$ określone jako złożenie:

$$h(x,y)=J_{2\times1}(f(x),g(y))$$

jest iniekcją zbioru $A\times B$ w zbiór $\mathbf{N}_0$. Wobec tego $A\times B$ jest zbiorem przeliczalnym, tj.

$$\overline{\overline{A\times B}}\le\aleph_0$$

f) Jeżeli co najmniej jeden ze zbiorów $A_1,\dots,A_n$ jest zbiorem pustym, to $\underset{i=1}{\times} A_i=\varnothing$. Przyjmujemy, że żaden ze zbiorów $A_1,\dots,A_n$ nie jest pusty i dowód przeprowadzamy indukcyjnie wykorzystując poprzednią własność.

g) Niech A będzie zbiorem przeliczalnym. Dla $n=1,2,\dots$ zbiór A^n jest zbiorem ciągów n–elementowych o wyrazach ze zbioru A. Zbiór A^n jest zbiorem przeliczalnym jako iloczyn kartezjański skończonej ilości zbiorów przeliczalnych. Stąd zbiór $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A^n$ wszystkich ciągów skończonych o wyrazach z A jest przeliczalny na mocy własności c).

120. Piraci (Lewis Carrol[1]). W zaciętej bitwie 70 spośród 100 piratów straciło jedno oko, 75 – jedno ucho, 80 – jedną rękę i 85 – jedną nogę. Jaka jest najmniejsza liczba piratów, którzy jednocześnie stracili oko, ucho, rękę i nogę ?

---

[1] Lewis Carrol to pseudonim matematyka C. L. Dodgsona znanego jako pisarza literatury dziecięcej. Autor m.in. *Alicji w krainie czarów*. Piraci to zadanie zaczerpnięte z jednej z jego powieści.

Wskazówka. Oznaczenia A – zbiór piratów jednookich, B – zbiór piratów jednouchych, C – zbiór piratów jednorękich, D – zbiór piratów jednonogich. Oszacowanie szukanego zbioru $\overline{\overline{A \cap B \cap C \cap D}} \geq 10$.

121. Dziwne towarzystwo (Steinhaus). Ktoś opowiadał, że znalazł się w towarzystwie liczącym (razem z nim) 12 osób tak dobranym, że

a) każdy miał w tym gronie 6 nieznajomych, pozostałych znał,
b) każdy należał do trójki nawzajem znających się,
c) nie było czwórki osób, które by znały się nawzajem,
d) nie było czwórki osób, w której nikt nikogo nie znał,
e) każdy należał do trójki osób nawzajem się nieznających,
f) każdy miał wśród swoich nieznajomych takiego, z którym nie mieli wspólnych znajomych w owym gronie.

Słysząc to dr Szaradek oświadczył, że był w takim towarzystwie, w którym spełnione były warunki a), b), d) i e), ale każdy znał 6 i tylko 6 osób i miał znajomego, z którym razem znali wszystkich (tj. takiego, który go mógł zapoznać z resztą towarzystwa).
Czy te opowiadania są prawdziwe ?
Czy można znaleźć przykład 10 osób taki, żeby spełniły się warunki b), c) d) i e), żeby każdy znał pięć osób i miał znajomego znającego resztę ?
Czy można znaleźć 10 osób spełniających warunki od b) do f) ?

122. Czy możliwe jest, że w mieście milionowym żyją dwie osoby o takiej samej liczbie włosów na głowie ?

123. Wyznaczyć moce zbiorów:

a) $\mathbf{Q}$ – zbiór liczb wymiernych;
b) Zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych;
c) Zbiór wszystkich liczb algebraicznych;
d) Zbiór wszystkich przedziałów na prostej, mających oba końce wymierne;
e) Każda rodzina okręgów $\{K(a, b), r): a, b, r \in \mathbf{Q}\}$;
f) Każda rodzina parami rozłącznych przedziałów na prostej;
g) Zbiór punktów nieciągłości funkcji monotonicznej $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$;
h) Zbiór ekstremów funkcji ciągłej o wartościach rzeczywistych.

Wskazówki. a) Określamy funkcję f: $\mathbf{Z} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ wzorem: $f(m,n) = [(m,n)]_R = \dfrac{m}{n}$. Ponieważ zbiór $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ jest przeliczalny, więc istnieje funkcja g przekształcająca zbiór $\mathbf{N}$ na $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$. Funkcja złożona $f \circ g$ przekształca zbiór $\mathbf{N}$ na zbiór $\mathbf{Q}$, a więc zbiór $\mathbf{Q}$ jest przeliczalny.

b) Każdemu wielomianowi

$$W_n(\mathbf{Q}) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

o współczynnikach wymiernych odpowiada we wzajemnie jednoznaczny sposób skończony ciąg jego współczynników $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Q}^{n+1}$ liczb wymiernych. Na mocy ... zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny. Stąd zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach wymiernych jest przeliczalny. W konsekwencji zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych jest również przeliczalny.

c) Liczby algebraiczne są to pierwiastki wielomianów $W_n(\mathbf{Q})$ o współczynnikach wymiernych. Każdemu wielomianowi można przyporządkować ciąg skończony wszystkich jego pierwiastków. Na mocy zad. g) i twierdz. wynika, że istnieje przekształcenie f zbioru **N** na zbiór $W_n(\mathbf{Q})$. Stąd obrazy $f(n)$ wszystkich liczb naturalnych $n \in \mathbf{N}$ przy przekształceniu f wyczerpują wszystkie wielomiany jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych.

124. (Lemat o nieprzeliczalności przedziału $[0,1]$) Wykazać, że zbiór liczb rzeczywistych z przedziału [0, 1] jest zbiorem nieprzeliczalnym, tj. ma miejsce własność

$$\overline{\overline{[0,1]}} > \aleph_0 \text{ gdzie } [0,1] = \{x \in \mathbf{R} : 0 \le x \le 1\})$$

Dowód. Wykażemy przez sprowadzenie do sprzeczności, że nie istnieje ciąg o wyrazach z przedziału [0, 1] taki, że każda liczba rzeczywista z tego przedziału jest wyrazem ciągu. Niech $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek $f(n) = x_n$ oraz:

$$\underset{n\in\mathbf{N}}{\forall} \; 0 \le x_n \le 1 .$$

Konstruujemy ciąg przedziałów przyjmując, że $[a_0, b_0] = [0,1]$, przedział $[a_0, b_0]$ dzielimy na trzy domknięte przedziały postaci

$$[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1].$$

Spośród nich wybieramy taki, do którego nie należy x_1 i oznaczamy go przez $[a_1, b_1]$. Spełnione są wówczas warunki

$$x_1 \notin [a_1, b_1],\; b_1 - a_1 = 1/3 \text{ i } [a_1, b_1] \subset [0,1] = [a_0, b_0] .$$

Podobnie postępując z przedziałem $[a_1, b_1]$ wyznaczymy przedział $[a_2, b_2]$ spełniający warunki

$$x_2 \notin [a_2, b_2],\; b_2 - a_2 = (1/3)^2 \text{ i } [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] .$$

Ogólnie, mając już określony przedział taki, że

$$x_{n-1} \notin [a_{n-1}, b_{n-1}],\; b_{n-1} - a_{n-1} = (1/3)^{n-1},\; [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a_{n-2}, b_{n-2}]$$

wyznaczamy, kontynuując to postępowanie, przedział $[a_n, b_n]$ spełniający warunki:

$$(*)\;\; x_n \notin [a_n, b_n],\;\; b_n - a_n = (1/3)^n,\;\; [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$$

W ten sposób określamy ciąg przedziałów

$$([a_n, b_n])_{n\in\mathbf{N}}$$

spełniający warunki (*) dla każdego $n \ge 1$. Z (*) wynika, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ zachodzą nierówności

$$0 \le a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \le 1 .$$

Ciągi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ są więc monotoniczne i ograniczone, zatem są zbieżne. Na mocy (*) dla każdego $n \in \mathbf{N}$ mamy

$$b_n - a_n \le (1/3)^n ,$$

stąd

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 .$$

W konsekwencji

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x, \quad \text{gdzie } x \in [0,1].$$

Liczba rzeczywista x należy do każdego z przedziałów $[a_n, b_n]$, więc jest różna od każdego x_n, ponieważ na mocy (*) $x_n \notin [a_n, b_n],\ n \in \mathbf{N}$. Wobec dowolności ciągu $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ wykazaliśmy, że dla każdego ciągu o wyrazach z przedziału [0, 1], istnieje liczba rzeczywista w tym przedziale, która nie jest wyrazem ciągu, co kończy dowód.

125. Wykazać podane własności zbiorów nieprzeliczalnych.

a) Nadzbiór B zbioru nieprzeliczalnego A jest zbiorem nieprzeliczalnym

$$(\overline{\overline{A}} > \aleph_0 \ \wedge\ A \subset B) \to (\overline{\overline{B}} > \aleph_0);$$

b) Suma dwóch zbiorów nieprzeliczalnych jest zbiorem nieprzeliczalnym;

c) Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów nieprzeliczalnych jest zbiorem nieprzeliczalnym;

126. Wykazać, że zbiór wszystkich liczb przestępnych jest nieprzeliczalny.

Rozwiązanie. Liczby przestępne są to liczby rzeczywiste, które nie są liczbami algebraicznymi. Zbiór wszystkich liczb algebraicznych jest zbiorem przeliczalnym, więc zbiór liczb przestępnych musi być nieprzeliczalny.

127. Dotychczas poznaliśmy dwie liczby kardynalne nieskończone. Odpowiadają one mocy zbiorów równolicznych ze zbiorem liczb naturalnych oraz mocy zbiorów równolicznych z przedziałem jednostkowym zbioru liczb rzeczywistych. Ani zbiór punktów kwadratu, ani zbiór punktów sześcianu nie ma większej mocy. Czy wobec tego moc przedziału rzeczywistego jest największa ?

128. Lemat przekątniowy Cantora. Niech f będzie funkcją

$$f : A \to 2^X,$$

gdzie X jest dowolnym zbiorem i $A \subseteq X$. Wykazać, że istnieje wtedy zbiór $Z \in 2^X$ taki, że

$$\forall_{x\in A}\ Z \neq f(x),$$

tzn. funkcja f nie jest surjekcją.

Rozwiązanie. Dla każdego $x \in A$ mamy $f(x) \subseteq X$. Określmy zbiór Z jako

$$Z = \{x \in A :\ x \notin f(x)\}.$$

Wtedy $Z \subseteq A$, a ponieważ $A \subseteq X$, więc $Z \in 2^X$. Pokażemy, że zbiór Z nie jest wartością funkcji f w żadnym punkcie zbioru A. Przypuśćmy, że dla pewnego $x_0 \in A$ mamy $Z = f(x_0)$. Rozważmy dwie możliwości:

(a) Niech $x_0 \in Z$, wtedy x_0 musi spełniać warunek występujący w definicji zbioru Z, tzn. $x_0 \notin f(x_0)$, ale $f(x_0) = Z$ i $x_0 \in Z$, czyli $x_0 \in f(x_0)$ co daje sprzeczność.

(b) Niech $x_0 \in A \setminus Z$, wtedy $x_0 \notin Z$, nie spełnia więc warunku występującego w definicji zbioru Z, czyli $\neg(x_0 \notin f(x_0))$. Stąd $x_0 \in f(x_0)$ i $x_0 \notin Z$, co jest sprzeczne z założeniem, że $Z = f(x_0)$.

Ponieważ dla dowolnego $x_0 \in A$ zachodzi albo (a) albo (b), więc otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, co kończy dowód nie wprost twierdzenia.

129. Wykazać, że dla dowolnego zbioru *X* zbiór 2^X nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem zbioru *X*, czyli

$$\underset{X}{\forall}\ \underset{A\subseteq X}{\forall} \neg\left(2^X \cong A\right)$$

Jaki wniosek wynika z tego faktu ?

Dowód (nie wprost). Gdyby $A \cong 2^X$, to istniałaby funkcja wzajemnie jednoznaczna $f : A \to 2^X$, co jest sprzeczne z lematem Cantora. Stąd zbiór *A* nie może być podzbiorem zbioru *X*. W szczególności zbiory *X* i 2^X nie są równoliczne.

Wniosek. Zbiór $2^{\mathbf{N}}$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych jest nieprzeliczalny.

130. Wyznaczyć moce zbiorów:

i) **R** liczb rzeczywistych;
j) **NQ** liczb niewymiernych;
k) **C** liczb zespolonych.

Wskazówki.

a) Wystarczy wykazać, że $\mathbf{R} \cong [0,1]$.

b) Gdyby zbiór liczb niewymiernych był przeliczalny, to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup N\mathbf{Q}$ byłby zbiorem przeliczalnym na mocy ....

c) Ponieważ $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$, więc wystarczy wykazać, że zbiór $\mathbf{R}^2$ jest nieprzeliczalny. Najpierw można wykazać, że kwadrat bez brzegów o boku jednostkowym jest równoliczny z przedziałem (0, 1).

131. Wykazać, że zbiór *B* wszystkich funkcji określonych na zbiorze *A* i przyjmujących wartości 0 i 1 ma moc większą niż moc zbioru *A*.

Dowód. Najpierw wykażemy, że moc zbioru *B* jest nie mniejsza niż moc zbioru *A*. W tym celu każdemu punktowi *a* zbioru *A* przyporządkowujemy funkcję $f_a(x)$ przyjmującą w tym punkcie wartość 1, a w pozostałych punktach – wartość 0. Oczywiście, różnym punktom odpowiadają różne funkcje. Zatem moc zbioru *B* jest nie mniejsza niż moc zbioru *A*.

Wykażemy teraz, że moce te nie są sobie równe, tzn. że nie istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między elementami zbiorów *A* i *B*. W tym celu założymy przeciwnie, że istnieje taka odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna.

Tworzymy nową funkcję $\varphi(x)$ określoną równością

$$\varphi(x) = 1 - f_x(x)$$

Aby znaleźć wartość funkcji $\varphi(x)$ w pewnym punkcie $a \in A$, należy najpierw znaleźć odpowiadającą temu punktowi funkcję $f_a(x)$, a następnie odjąć od jedynki wartość tej funkcji dla $x = a$. Funkcja $\varphi(x)$ jest określona na zbiorze *A* i przyjmuje wartości w zbiorze $\{0,1\}$. Zatem $\varphi(x) \in B$. Lecz wówczas, zgodnie z założeniem, $\varphi(x)$ odpowiada pewnemu punktowi *b* zbioru *B*, tzn.

$$\varphi(x) = f_b(x).$$

Uwzględniając pierwszą równość dla $\varphi(x)$ otrzymujemy, że dla wszystkich $x \in A$

$$1 - f_x(x) = f_b(x).$$

Podstawimy w tej równości $x = b$. Wówczas otrzymamy, że

$$1 - f_b(b) = f_b(x)$$

skąd

$$f_b(b) = \frac{1}{2}.$$

Jest to jednak sprzeczne z założeniem, że wartości funkcji $f_b(x)$ są równe 0 lub 1. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że między zbiorami A i B nie może istnieć odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna. Zatem dla dowolnego zbioru A można zbudować zbiór B o większej mocy. Dlatego nie istnieje zbiór największej mocy.

132. Wykazać, że dla dowolnej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ prawdziwa jest nierówność

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}.$$

Dowód. Najpierw zauważymy, że zbiór A mocy $\mathfrak{m}$ jest równoliczny z podzbiorem zbioru 2^A składającym się ze zbiorów jednoelementowych. Na mocy twierdzenia, że zbiór potęgowy nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem mamy $\mathfrak{m} \neq 2^{\mathfrak{m}}$.

133. (Drugie twierdzenie Cantora-Bernsteina**.** Wykazać, że dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ zachodzą własności:

a) $\mathfrak{m} \le \mathfrak{m}$ – zwrotność;

b) $(\mathfrak{m} \le \mathfrak{n} \wedge \mathfrak{n} \le \mathfrak{m}) \to (\mathfrak{m} = \mathfrak{n})$ – antysymetria;

c) $(\mathfrak{m} \le \mathfrak{n} \wedge \mathfrak{n} \le \mathfrak{p}) \to (\mathfrak{m} \le \mathfrak{p})$ – przechodniość.

Dowód. b) Ponieważ $f * X \subseteq Y$, $g * Y \subseteq X$, gdzie $f : X \xrightarrow{1-1} Y$, $g : Y \xrightarrow{1-1} X$, więc z własności monotoniczności obrazu, otrzymujemy $f*(g*Y) \subseteq f * X \subseteq Y$ i na mocy pierwszego twierdzenia Cantora-Bernsteina $f * X \cong Y$.

c) Niech $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{n}$, $\overline{\overline{C}} = \mathfrak{p}$ i niech zbiory A, B i C będą rozłączne. Ponadto, niech funkcja f ustanawia równoliczność zbiorów A i $B_1 \subseteq B$, a g między B i $C_1 \subseteq C$, wówczas $g \circ f$ ustanawia równoliczność między A i $C_1 \subseteq C$, więc $\mathfrak{m} \le \mathfrak{p}$.

134. Wykazać, że zawsze istnieje:

a) suma dwóch licz kardynalnych;
b) iloczyn dwóch liczb kardynalnych.

Dowód. a) Załóżmy, że $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{n}$ oraz że C i D spełniają warunek $A \cong C, B \cong D$ i $C \cap D = \varnothing$. Stąd suma $C \cup D$ rozpada się na dwa zbiory rozłączne mocy $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$. Każdy zbiór równoliczny z sumą $C \cup D$ ma tę samą własność. A więc $\overline{\overline{A \cup B}} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$. Tym samym udowodniliśmy, że $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}}$, o ile $A \cap B = \varnothing$.

135. Wykazać, że

a) $3 + 5 = 8$;

b) $3 \cdot 5 = 15$;

c) $\mathfrak{n} + \aleph_0 = \aleph_0$ (gdzie $\mathfrak{n}$ oznacza dowolną liczbę kardynalną skończoną);

d) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$;

e) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$;

f) $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$;

g) $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$;

h) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$;

i) $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Wskazówka. Wykorzystać wcześniej wykazane własności lub skonstruować odpowiednie zbiory i funkcje.
Odp.: e) wynika z twierdz. o iloczynie kartezjańskim dwóch zbiorów przeliczalnych.
g) $\mathbf{N} \times \mathbf{R} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (\{i\} \times \mathbf{R})$ i $\{i\} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$

136. Wykazać, że dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ prawdziwe są własności:

a) $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}$;

b) $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}$;

c) $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) + \mathfrak{p} = \mathfrak{m} + (\mathfrak{n} + \mathfrak{p})$;

d) $(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p})$;

e) $\mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}) + (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p})$;

f) $\mathfrak{n} + 0 = 0$;

g) $\mathfrak{n} \cdot 1 = 1$;

h) $\mathfrak{n} \cdot 0 = 0$;

Odp.: a) Jeśli $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, to $A = B \cup C$, gdzie $B \cap C = \varnothing$, $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{m}$ i $\overline{\overline{C}} = \mathfrak{n}$. Wobec tego, że $A = C \cup B$, mamy $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}$, co kończy dowód;
b) jest konsekwencją własności $A \times B \cong B \times A$;
d) jest konsekwencją własności $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$;
e) wynika z własności $A \times (B \cup C) \cong (A \times B) \cup (A \times C)$ i $B \cap C = \varnothing \Rightarrow (A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$;
g) wynika z własności $A \times \{a\} \cong A$;

137. Podać przykład liczb kardynalnych $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{m}$ takich, że $\mathfrak{n} + 1 \le \mathfrak{m}$ i $\neg \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$.
Odp. Np. $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} = \aleph_0$, ponieważ $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$.

138. Wykazać własność dla liczb kardynalnych

$$(\mathfrak{n} \le \mathfrak{m}) \leftrightarrow \exists_{p} (\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$$

Czy liczba $\mathfrak{p}$ jest określona jednoznacznie ?
Odp. Niech $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{n}$, $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{m}$ i $A \subseteq B$. Jako liczbę kardynalną $\mathfrak{p}$ przyjmujemy $\mathfrak{p} = \overline{\overline{B \setminus A}}$, np. $\aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2$.

139. Wykazać własności.

a) $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$;

b) $n^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (n – liczba kardynalna skończona);

c) ${\aleph_0}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$;

d) $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$;

Odp. a) Zbiór wszystkich przeliczalnych ciągów złożonych z 0 i 1 ma moc $\mathfrak{c}$. Dowód. Zbiór $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ ciągów licz naturalnych jest równoliczny z podzbiorem $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ ciągów liczb naturalnych a_0, a_1, … ustawionym według schematu:

$$\underbrace{0,\ldots,0,}_{a_0}\ \underbrace{1,0,\ldots,0,1}_{a_1} \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

140. Wykazać, że dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ zachodzą własności:

a) $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$;

b) $(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$;

c) $(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}$·;

d) $\mathfrak{m}^{\mathfrak{1}} = \mathfrak{m}$

e) $\mathfrak{1}^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{1}$.

141. Wykazać własność $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$.

Wskazówka. $2^{\overline{A}}$ jest mocą zbioru $\{0,1\}^A$, tj. zbioru funkcji *f*, których wartościami są liczby 0 i 1, a których argumentami są elementy zbioru *A*. Każda taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie przez zbiór $X_f = \{x \in A : f(x) = 1\}$. Przy tym różnym funkcją *f* i *g* odpowiadają różne zbiory X_f i X_g. Przyporządkowując funkcji $f \in \{0,1\}^A$ zbiór $X_f \subseteq A$, ustalamy bijekcję między zbiorami $\{0,1\}^A$ i 2^A.