PROBLEMY I ZADANIA TM (43-55)

V. RELACJE

43. Niech R będzie binarną relacją na A. Wykazać, że $R = I_A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = S \circ R = S$ dla dowolnej relacji S na A.

Dowód ($\Rightarrow$). Jeżeli $R = I_A$, to dla dowolnej relacji S na A mamy $(x, y) \in S \circ R \Leftrightarrow$ istnieje z takie, że $(x,z) \in R$ i $(z, y) \in S$, ale $(x,z) \in R$ tylko dla $x = z$. W związku z tym $S \circ R = S$. Analogicznie $R \circ S = S$.
$\Leftarrow$) Niech S będzie dowolną relacją na A oraz $S \circ R = S$ i $R \circ S = S$, wówczas $(x, y) \in S \circ R$ oznacza, że istnieje z takie, że $(x,z) \in R$ i $(z, y) \in S$ i $(x, y) \in S$, co zachodzi dla $x = z$, czyli dla $R = I_A$.

44. Zbadać, czy dla dowolnej relacji R prawdziwa jest równoważność

$$R \subseteq R^{-1} \leftrightarrow R = R^{-1}.$$

45. Określić zakresy zmienności relacji i zbadać, czy prawdziwe są równości zbiorów:

a) $R \cup R = R \cap R = R$;
b) $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$;
c) $\left(R_1 \cup R_2\right)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;
d) $\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$;
e) $\left(R_1 \cap R_2\right)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;
f) $\left(\bigcap_{i \in \mathbf{I}} R_i\right)^{-1} = \bigcap_{i \in \mathbf{I}} R_i^{-1}$;
g) $(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1}$;
h) $(R \div S)^{-1} = R^{-1} \div S^{-1}$;
i) $\left(R^{-1}\right)' = \left(R'\right)^{-1}$;
j) $I_X^{-1} = I_X$;
k) $\left(X^2\right)^{-1} = X^2$.

46. Dla jakich relacji $R \subseteq X \times Y$ zachodzi równość $R^{-1} = R'$?

47. Ile istnieje binarnych relacji między elementami zbiorów A i B, jeżeli zbiory składają się odpowiednio z m i n elementów. (Odp. $2^{m \cdot n}$).

48. Określić zakresy zmienności relacji n–argumentowych i wykazać podane własności.

a) $R_3 \circ \left(R_2 \circ R_1\right) = \left(R_3 \circ R_2\right) \circ R_1$;
b) $\left(R_2 \circ R_1\right)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$;

c) $Q \circ \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) = \bigcup_{i \in I} (Q \circ R_i)$ (wersja uogólniona na wykładzie);

d) $\left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \circ Q = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ Q)$;

e) $(X \times Y)^{-1} = Y \times X$.

49. Określić zakresy zmienności relacji i wykazać własności

a) $\left(\bigcap_{i \in \mathbf{I}} R_i \right) \circ Q \subseteq \bigcap_{i \in \mathbf{I}} (R_i \circ Q)$; (w)

b) $Q \circ \left(\bigcap_{i \in \mathbf{I}} R_i \right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathbf{I}} (Q \circ R_i)$.

Czy inkluzje można zamienić równościami ?

50. Określić zakresy zmienności relacji i wykazać, że jeżeli $R_1 \subseteq R_2$, to

a) $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$;

b) $R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q$;

c) $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$.

51. Niech relacje $S, T \subseteq \mathbf{R}^2$ oraz $S = \{(x, y) : y = x^2 + 5\}$, $T = \{(x, y) : y = 3x\}$.

a) Wyznaczyć relację $S \circ T$.
b) Wyznaczyć relację $T \circ S$.
c) Wyznaczyć relację $S \circ S$.
d) Wyznaczyć relację S^{-1} .
e) Wyznaczyć dziedziny relacji *S*.

52. Skonstruować przykład relacji trójargumentowej i wskazać jej dziedziny.

53. Wyznaczyć zbiory $D_1(R)$, $D_2(R)$, R^{-1}, $R \circ R$, $R^{-1} \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R * \{2, 3, 4\}$, $R^{-1} * \{4, 5, 6\}$, R' i sporządzić ich wykresy dla relacji

a) $R = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x \text{ dzieli } y\}$;

b) $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x \geq 3y\}$;

c) $R = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x^2 + y^2 \leq 36\}$.

Rozwiązanie. a) $D_1(R) = D_2(R) = \mathbf{N}$, bo $(x, x) \in R$ dla dowolnego $x \in \mathbf{N}$,
$\mathbf{R}^{-1} = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : y \text{ dzieli } x\}$;
$R \circ R = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : \text{istnieje } z \in \mathbf{N} \text{ takie, że } x \text{ dzieli } z \text{ i } z \text{ dzieli } y\} = R$;
$R^{-1} \circ R = \mathbf{N}^2$, ponieważ $(x, y) \in R^{-1} \circ R \Leftrightarrow$ istnieje *z* takie, że *x* dzieli *z* i *y* dzieli *z*. Takie *z* istnieje dla dowolnych *x* i *y*. Wystarczy obrać $z = x \cdot y$,
$R \circ R^{-1} = \mathbf{N}^2$, ponieważ $(x, y) \in R \circ R^{-1} \Leftrightarrow$ istnieje *z* takie, że *z* dzieli *x* i *z* dzieli *y*. Wystarczy obrać $z = 1$ dla dowolnych $x, y \in \mathbf{N}$.
$R * \{2, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, \ldots\} = \{x \in \mathbf{N} : 2|x \text{ lub } 3|x\}$
$R^{-1} * \{4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R' = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : \neg x|y\}$

b) $D_1(R) = D_2(R) = \mathbf{R}$, $R^{-1} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2y \geq 3x\}$, $R \circ R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 4x \geq 9y\}$,

$R*\{2,3,4\}=\{y\in\mathbf{R}:\ y\le 8/3\}=(-\infty,8/3]$, $R^{-1}*\{4,5,6\}=[6,\infty)$,
$R'=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ 2x<3y\}$.

54. Wyznaczyć zbiory $D_1(R)$, $D_2(R)$, R^{-1}, $R\circ R$, $R^{-1}\circ R$, $R\circ R^{-1}$, $R*(0,1/2)$, $R^{-1}*(0,1/2)$, R' i sporządzić ich wykresy dla podanych relacji.

a) $R=\left\{(x,y)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]^2:\ y\ge\sin x\right\}$;

b) $R=\{(x,y)\in[-1,1]^2:\ y\ge x^2\}$;

c) $R=\{(x,y)\in[-1,1]^2:\ |y|>x^2\}$;

d) $R=\{(x,y)\in[-1,1]^2:\ x^2+y^2<1\}$.

Odp. a) $D_1(R)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $D_2(R)=\left[-1,\frac{\pi}{2}\right]$, $R^{-1}=\left\{(x,y)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]^2:\ x\ge\sin y\right\}$,

$R^{-1}\circ R=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]^2$, $R\circ R^{-1}=\left\{(x,y):\ x,y\in\left[-1,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

55. Mówimy, że liczba całkowita $x\ne 0$ dzieli liczbę całkowitą *y*, jeżeli istnieje taka liczba całkowita *k*, że $kx=y$, tj.

$$xRy\overset{def}{\Leftrightarrow}\underset{k\in\mathbf{Z}}{\exists}\ kx=y$$

Relację tę nazywamy relacją podzielności w zbiorze liczb całkowitych i oznaczamy ją $x|_{\mathbf{Z}}y$ lub $x|y$. Wykazać własności:

a) $(x|y\wedge x|z)\to(x|(y+z)\wedge x|(y-z))$;

b) $(x|y\wedge y|z)\to x|z$;

c) $(x|y\wedge z\in\mathbf{Z})\to x|(yz)$;

d) $(x|y\wedge y|x)\to(x=y\vee x=-y)$.

Dowód. a) Zakładamy, że prawdziwy jest poprzednik implikacji. Korzystając z: (1) definicji relacji, (2) prawa kwantyfikatora egzystencjalnego, (3) własności liczb całkowitych otrzymujemy:

$$(x|y\wedge x|z)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left(\underset{k_1\in\mathbf{Z}}{\exists}k_1x=y\wedge\underset{k_2\in\mathbf{Z}}{\exists}k_2x=z\right)\overset{(2)}{\Rightarrow}\underset{k_1\in\mathbf{Z}}{\exists}\ \underset{k_2\in\mathbf{Z}}{\exists}(k_1x=y\wedge k_2x=z)$$
$$\overset{(3)}{\Rightarrow}\underset{k_1+k_2\in\mathbf{Z}}{\exists}\ \underset{k_1-k_2\in\mathbf{Z}}{\exists}((y\pm z)=(k_1\pm k_2)x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}(x|(y+z)\wedge x|(y-z)).$$

Podobnie łatwo wykazujemy pozostałe własności podzielności.