PROBLEMY I ZADANIA TM (56-77)
VI. SPECJALNE RELACJE DWUARGUMENTOWE

56. Podać własności geometryczne relacji $R \subseteq \mathbf{R}^2$.

a) Relację dwuargumentową R interpretujemy geometrycznie jako podzbiór płaszczyzny kartezjańskiej;
b) Pierwsza dziedzina, tj. zbiór D_1R jest rzutem relacji R na oś 0x, a druga dziedzina, czyli zbiór D_2R jest rzutem relacji R na oś 0y.
c) Relacja R jest zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy prosta o równaniu $y = x$ jest w niej zawarta.
d) Relacja R jest przeciwzwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy prosta o równaniu $y = x$ jest z nią rozłączna.
e) Relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy prosta o równaniu $y = x$ jest jej osią symetrii.
f) Relacja R jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera punktów symetrycznych względem prostej o równaniu $y = x$.
g) Relacja R jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy jedynymi jej punktami symetrycznymi względem prostej $y = x$ są punkty leżące na tej prostej.
h) Relacja R jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy suma mnogościowa figury reprezentującej relację R, prostej opisanej równaniem $y = x$ oraz figury symetrycznej względem tej prostej jest całą płaszczyzną.

57. Niech $X = \{a,b,c,d,e\}$ oraz $R = \{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(e,d),(c,b)\}$.
a) Określić najmniejszą relację zwrotną na X zawierającą relację R.
b) Określić najmniejszą relację symetryczną na X zawierającą relację R.
c) Określić najmniejszą relację zwrotną i symetryczną na X zawierającą relację R.
d) Określić największą relację symetryczną na X zawartą w relacji R.
e) Określić najmniejszą relację przechodnią na X zawierającą relację R.
f) Określić najmniejszą relację zwrotną, symetryczną i przechodnią na X zawierającą relację R.
g) Określić największą relację zwrotną, symetryczną i przechodnią na X zawartą w relacji R.

58. Zbadać, czy każdą relację $R \subseteq X^2$ można rozszerzyć do relacji
a) zwrotnej w X,
b) przeciwzwrotnej w X,
c) symetrycznej w X,
d) przeciwsymetrycznej w X,
e) antysymetrycznej w X,
f) przechodniej w X,
g) spójnej w X

Odp.: a) T; b) N; c) T; d) N; e) N; f) T; g) T.

59. Zbadać własności relacji.

a) $R \subseteq \mathbf{Z}^2$, $xRy \overset{def.}{\Leftrightarrow} \underset{k \in \mathbf{Z}}{\exists} kx = y$ (ozn. $x|y$) Zw, Przech, $\neg$ Antys.

b) $R \subseteq \mathbf{N}^2$, $xRy \overset{drf.}{\Leftrightarrow} 2|x + y$, Zw, Sy, Pr

c) $R \subseteq \mathbf{N}^2$, $xRy \overset{def.}{\Leftrightarrow} x \neq 0 \wedge x|y$, An, Pr, $\neg$Zw, $\neg$Sp,

d) $R \subseteq \mathbf{R}^2$, $xRy \overset{def.}{\Leftrightarrow} |x-1| = |y+1|$ $\varnothing$,

e) $R \subseteq \mathbf{C}^2$, $xRy \overset{def.}{\Leftrightarrow} |x| < |y|$, Pz, As, Pr, $\neg$Sp,

f) $R \subseteq (\mathbf{W}^2)^2$, $(x, y)R(z,t) \overset{def.}{\Leftrightarrow} xt = yz$. Zw, Sy, $\neg$Pr

g) $R \subseteq (2^{\mathbf{N}})^2$, $XRY \overset{def.}{\Leftrightarrow} X \div Y$ jest zbiorem skończonym. Odp.: Zw bo $X \div X = \varnothing$, Sy bo $X \div Y = Y \div X$, Pr bo $X \div Z \subseteq (X \div Y) \cup (Y \div Z)$.

h) $R \subseteq PEOPLE^2$, $xRy \overset{def.}{\Leftrightarrow}$ x jest znajomym y;

i) $R \subseteq PEOPLE^2$, $xRy \overset{def.}{\Leftrightarrow}$ x jest bratem y.

60. Zbadać własności podanych relacji $R \subseteq X^2$ dla $X = \{x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1\}$.

a) $R = \{(x, y) \in X^2 : x \in \mathbf{Q} \wedge y \in \mathbf{Q}\}$;
b) $R = \{(x, y) \in X^2 : |x| \leq |y|\}$;
c) $R = \{(x, y) \in X^2 : x^2 \leq y \leq x\}$.

61. Określić relację, która jest:
a) zwrotna, symetryczna i nie jest przechodnia;
b) zwrotna, antysymetryczna i nie jest przechodnia;
c) zwrotna, przechodnia i nie jest symetryczna;
d) antysymetryczna, przechodnia i nie jest zwrotna;
e) symetryczna, przechodnia i nie jest zwrotna;
f) zwrotna, przechodnia i nie jest spójna;
g) przechodnia i spójna i nie jest antysymetryczna.

Odp.: a) np. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon |x - y| \leq 1\}$;
b) $\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2\colon x \leq y \leq x^2\}$;
c) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon x \leq y\}$;
d) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon x = y = 0\}$;
e) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon x > 0, y > 0\}$.

62. Zbadać, czy jeżeli relacje R i S są zwrotne w X, to relacje

a) $R \cup S$,
b) $R \cap S$,
c) $S \circ R$,
d) $R \setminus S$,
e) R^{-1}

też są zwrotne. Czy a), b) i c) można uogólnić na dowolną rodzinę relacji zwrotnych ?

63. Wykazać, że jeżeli relacje R i S są przeciwzwrotne w X, to relacje

a) $R \cup S$,
b) $R \cap S$,
c) R^{-1}.

też są przeciwzwrotne, natomiast

d) $S \circ R$ może nie być przeciwzwrotna.
e) Czy a) i b) można uogólnić na dowolna rodzinę relacji przeciwzwrotnych ?

Rozwiązanie. d) R jest relacją przeciwzwrotną na $X \Leftrightarrow R \cap I_X = \varnothing$. Niech

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : \ x < y\}, \ S = R^{-1},$$

wówczas, złożenie $S \circ R$ jest relacją zwrotną.

64. Zbadać czy, że jeżeli relacje R i S są symetryczne w X, to relacje

a) $R \cup S$,
b) $R \cap S$,
c) $S \circ R$, (w)
d) $R \setminus S$,
e) R^{-1}.

też są symetryczne. Czy własności a), b) i c) można uogólnić na dowolną rodzinę relacji symetrycznych ?

65. Wykazać, że jeżeli relacje R i S są antysymetryczne na X, to

a) relacja R^{-1} jest również antysymetryczna na X; (w)
b) relacja $R \cap S$ jest również antysymetryczna na X;
c) relacja $S \circ R$ jest również antysymetryczna na X;
d) relacja $R \cup S$ jest antysymetryczna na X wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} \subseteq I_X$.

66. Wykazać, że jeżeli relacja R jest przechodnia i symetryczna na X oraz $D_1(R) \cup D_2(R) = X$, to relacja R jest zwrotna.

Rozwiązanie. $x \in X \Rightarrow (x, y) \in R$ lub $(y, x) \in R$ dla pewnego y $\Rightarrow (x, y) \in R$ i $(y, x) \in R$ $\Rightarrow (x, x) \in R$.

67. Wykazać, że jeżeli relacja R jest symetryczna i antysymetryczna, to jest również przechodnia.
Wsk. $R \subseteq I_X$.

68. Zbadać, czy relacja $R \subseteq (\mathbf{N}_0^2)^2$ określona formułą

$$\forall_{(x,y)} \forall_{(t,w)} \big((x, y)R(t, w) \Leftrightarrow x + w = y + t\big)$$

jest relacją równoważności.

Rozwiązanie. Zwrotność jest oczywista, gdyż dla każdej pary uporządkowanej $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ zachodzi równość $x + y = y + x$, czyli $(x, y)R(x, y)$. Symetria relacji R również zachodzi, bo jeżeli $(x, y)R(t, w)$, to z definicji relacji R wynika, że $x + w = y + t$. Stąd również $t + y = w + x$, co oznacza, że $(t, w)R(x, y)$. Wykażemy jeszcze przechodniość relacji R. Niech $(x, y)R(t, w)$ i $(t, w)R(v, z)$. Wówczas z definicji relacji R zachodzą równości $x + w = y + t$ oraz $t + z = w + v$.

Stąd $x+w+t+z=y+t+w+v$, czyli $(x+z)+(w+t)=(y+v)+(t+w)$, skąd wynika, że $(x+z)=(y+v)$. Z definicji relacji R otrzymujemy $(x,y)R(v,z)$.

69. Zbadać, czy relacja produktowa relacji równoważności jest relacją równoważności. Jeśli tak, to wskazać jej klasy abstrakcji.

Rozwiązanie. Zakładamy, że relacje $R_i \subseteq X_i^2$, $i=1,\dots,n$ są zwrotne, symetryczne i przechodnie. Wykażemy, że relacja produktowa S jest również zwrotna, symetryczna i przechodnia. Dowód zwrotności relacji S. Niech $(x_1,\dots,x_n) \in \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i$, mamy wówczas

$$(x_1,\dots,x_n) \in \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \underset{i=1,\dots,n}{\forall} x_i \in X_i \overset{(2)}{\Rightarrow} \underset{i=1,\dots,n}{\forall} (x_i,x_i) \in R_i \overset{(3)}{\Leftrightarrow} ((x_1,\dots,x_n),(x_1,\dots,x_n)) \in S,$$

gdzie

(1) – definicja iloczynu kartezjańskiego n zbiorów,
(2) – założenie zwrotności relacji R_i, $i=1,\dots,n$,
(3) – definicja relacji produktowej.

czyli relacja produktowa S jest zwrotna. Dowód symetrii relacji S. Niech $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i$ będą takimi elementami, że $((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \in S$, mamy wówczas

$$((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \in S \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \underset{i=1,\dots,n}{\forall} (x_i,y_i) \in R_i \overset{(4)}{\Rightarrow} \underset{i=1,\dots,n}{\forall} (y_i,x_i) \in R_i \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$
$$((y_1,\dots,y_n),(x_1,\dots,x_n)) \in S,$$

gdzie

(4) – założenie symetrii relacji R_i, $i=1,\dots,n$,

czyli relacja S jest symetryczna. Dowód przechodniości relacji produktowej S. Niech $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n),(z_1,\dots,z_n) \in \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i$ będą takimi elementami, że $((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \in S$ oraz $((y_1,\dots,y_n),(z_1,\dots,z_n),) \in S$, mamy wówczas

$$\big(((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \in S \wedge ((y_1,\dots,y_n),(z_1,\dots,z_n),) \in S\big) \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$
$$\underset{i=1,\dots,n}{\forall} (x_i,y_i) \in R_i \wedge \underset{i=1,\dots,n}{\forall} (y_i,z_i) \in R_i \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \underset{i=1,\dots,n}{\forall} \big((x_i,y_i) \in R_i \wedge (y_i,z_i) \in R_i\big) \overset{(6)}{\Rightarrow}$$
$$\underset{i=1,\dots,n}{\forall} (x_i,z_i) \in R_i \overset{(3)}{\Leftrightarrow} ((x_1,\dots,x_n),(z_1,\dots,z_n)) \in S,$$

gdzie

(5) – prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji,
(6) – założenie przechodniości relacji R_i, $i=1,\dots,n$,

czyli relacja S jest przechodnia. Tym samym wykazaliśmy, że relacja produktowa relacji równoważności jest relacją równoważności. Zbadamy, jaki jest związek między klasami abstrakcji. W tym celu rozważmy klasę abstrakcji $[(x_1,\dots,x_n)]_S$ wyznaczoną przez relację produktową S w zbiorze $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i$. Niech dowolny element $(z_1,\dots,z_n)$ należy do klasy abstrakcji $[(x_1,\dots,x_n)]_S$, mamy wówczas

$$(z_1,...,z_n)\in[(x_1,...,x_n)]_S \overset{(7)}{\Leftrightarrow} ((z_1,...,z_n),(x_1,...,x_n))\in S \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{i=1,...,n}{\forall}(z_i,x_i)\in R_i \overset{(7)}{\Leftrightarrow} \underset{i=1,...,n}{\forall} z_i\in[x_i]_{R_i} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (z_1,...,z_n)\in \overset{n}{\underset{i=1}{\times}}[x_i]_{R_i}$$

gdzie

(7) – podstawowa własność klas abstrakcji,

Stąd klasa abstrakcji wyznaczona przez relację produktową jest równa iloczynowi kartezjańskiemu klas abstrakcji wyznaczonych przez relacje składowe.

70. Wykazać, że jeżeli relacje R_i, $i\in I$ są relacjami równoważności na zbiorze *X*, to iloczyn relacji $\bigcap_{i\in I} R_i$ jest relacją równoważności.

71. Wykazać, że relacja R^{-1} jest relacją równoważności w *X* wtedy i tylko wtedy, gdy relacja *R* jest relacją równoważności.

72. Czy dopełnienie relacji równoważności jest relacją równoważności na zbiorze *X* ?

73. Zbadać, czy relacja $R\subseteq \mathbf{C}^2$ określona formułą

$$\underset{w,z\in\mathbf{C}}{\forall} wRz \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathrm{Re}(w)=\mathrm{Re}(z)$$

(Re(*z*) oznacza cześć rzeczywistą liczby zespolonej *z*) jest relacją równoważności. Jeśli jest, to wskazać klasy abstrakcji wyznaczonych przez tę relację.

74. W zbiorze 5-elementowym wprowadzić relację równoważności wyznaczającą 3 klasy abstrakcji.

75. W zbiorze **N** wprowadzić dwie różne relacje wyznaczające po dwie klasy abstrakcji.

76. Płaszczyznę $\mathbf{R}^2$ dzielimy na zbiory będące

a) okręgami;
b) kwadratami;

o środkach w początku układu współrzędnych. Znaleźć relacje równoważności, której klasami abstrakcji są te zbiory.

77. Symbol $C^{\infty}_{[a,b]}$ oznacza zbiór funkcji zmiennej rzeczywistej posiadających w przedziale $[a,b]$ pochodne dowolnie wysokich rzędów. Wykazać, ze relacja $R\subseteq (C^{\infty}_{[a,b]})^2$ określona formułą

$$\underset{f,g}{\forall}\left(fRg \overset{def}{\Leftrightarrow} \underset{k,n\in\mathbf{N}}{\exists} f^{(n)}=g^{(k)}\right),$$

gdzie $f^{(n)}$ oznacza *n*–tą pochodną funkcji *f*, jest relacją równoważności. Wskazać kilka klas abstrakcji wyznaczonych przez tę relację.