PROBLEMY I ZADANIA TM (78-102)

VII. FUNKCJE

78. Wykazać że:

a) $\underset{B}{\forall}\left(B \neq \varnothing \rightarrow B^{A} \neq \varnothing\right)$;

b) $B^{A} \subseteq 2^{A \times B}$ (w).

Dowód. a) Niech $b \in B$, wówczas funkcja $f\colon A \rightarrow B$, określona następująco $f(x)=b$ dla wszystkich $x \in A$ należy do zbioru B^{A}.

79. Niech A i B będą zbiorami złożonymi z n i m elementów odpowiednio.

a) Ile istnieje funkcji z A w B ?

b) Ile istnieje iniekcji ?

c) Dla jakich m i n istnieje wzajemnie jednoznaczny związek między A i B ?

Odp.: a) m^{n}; b) jeżeli $m<n$, to takie funkcje nie istnieją, jeżeli $m \geq n$, to liczbie rozmieszczeń n elementów w m miejscach; c) dla $m=n$.

80. Zbadać, czy podane relacje są funkcjami.

a) $R=\left\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z} \;:\; x^{2}=y^{3}\right\}$;

b) $R=\left\{(x, y) \in \mathbf{C}^{2} \;:\; \operatorname{Im} x=\operatorname{Re} y\right\}$;

c) $R=\{(x, y) \in MI \times PA \;:\; x \text{ jest stolica } y\}$, gdzie *MI* jest zbiorem miast, *PA* zbiorem państw;

d) $R=\left\{(x, y, z) \in PEOPLE^{3}\colon\ z \textit{ jest ojcem } x \textit{ i } y\right\}$, gdzie *PEOPLE* oznacza zbiór ludzi.

81. Wykazać, że jeżeli $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ są odwzorowaniami takimi, że $g \circ f$ jest surjekcją, zaś g jest iniekcją, to funkcja f jest surjekcją. Znaleźć przykład wskazujący, że jeśli g nie jest iniekcją, to f nie musi być surjekcją.

Dowód (nie wprost). Przypuśćmy, że przekształcenie f nie jest surjekcją. Wtedy $D_{2}(f) \neq Y$, czyli $Y \setminus D_{2}(f) \neq \varnothing$. Niech $y_{0} \in Y \setminus D_{2}(f)$ oraz $z_{0}=g(y_{0})$. Ponieważ g jest iniekcją, więc dla każdego $y \neq y_{0}$ mamy $g(y) \neq z_{0}$. Jest tak dla każdego $y \in D_{2}(f)$, a zatem z_{0} nie jest wartością funkcji $g \circ f$, co przeczy założeniu, że $g \circ f$ jest surjekcją.

82. Podać przykład zbioru X i przekształcenia $f: X \rightarrow Y$, które jest surjekcją i nie jest iniekcją. Czy można znaleźć taki przykład wśród zbiorów skończonych ?

83. Podać przykład zbioru X i przekształcenia $f\colon X \rightarrow X$, które jest iniekcją, ale nie jest surjekcją. Czy można znaleźć taki przykład wśród zbiorów skończonych ?

84. **N**iech $f \in Y^{X}$ oraz $\left\{A_{t}\right\}_{t \in T}$ będzie dowolną indeksowaną rodziną podzbiorów zbioru X. Wykazać własności.

a) $f^{*}(A_{1} \cup A_{2})=f^{*}(A_{1}) \cup f^{*}(A_{2})$;

b) $f^{*} \bigcup_{t \in \mathbf{T}} A_{t}=\bigcup_{t \in \mathbf{T}} f^{*} A_{t}$;

c) $f^{*}(A_{1} \cap A_{2}) \subseteq f^{*}(A_{1}) \cap f^{*}(A_{2})$;

d) $f^{*} \bigcap_{t \in T} A_{t} \subseteq \bigcap_{t \in T} f^{*} A_{t}$; kiedy znak inkluzji można zastąpić znakiem równości ? (w)

e) $f*A_1 \setminus f*A_2 \subseteq f*(A_1 \setminus A_2)$;
f) $A_1 \subseteq A_2 \to f*A_1 \subseteq f*A_2$.

85 Niech $f \in Y^X$ oraz $\{B_t\}_{t\in T}$ będzie dowolną indeksowaną rodziną podzbiorów zbioru *Y*. Wykazać własności.

a) $f^{-1}*(B_1 \cup B_2) = f^{-1}*B_1 \cup f^{-1}*B_2$;
b) $f^{-1}*\bigcup_{t\in T} B_t = \bigcup_{t\in T}(f^{-1}*B_t)$;
c) $f^{-1}*(B_1 \cap B_2) = f^{-1}*B_1 \cap f^{-1}*B_2$;
d) $f^{-1}*\bigcap_{t\in T} B_t = \bigcap_{t\in T}(f^{-1}*B_t)$;
e) $f^{-1}*(B_1 \setminus B_2) = (f^{-1}*B_1)\setminus(f^{-1}*B_2)$ (w);
f) $(B_1 \subseteq B_2) \to (f^{-1}*B_1 \subseteq f^{-1}*B_2)$.

86. Wykazać, że jeśli $f \in Y^X$, to dla dowolnego $B \subseteq Y$ zachodzi równość

$$f*(f^{-1}*B) = B \cap f*X$$

wtedy i tylko wtedy, gdy *f* jest surjekcją.

87. Udowodnić, że jeśli $f \in Y^X$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ to:

a) $f*(A \cap f^{-1}*B) = (f*A) \cap B$;
b) $(A \cap f^{-1}*B) \subseteq f^{-1}*((f*A) \cap B)$;
c) $(f*A \subseteq B) \leftrightarrow (A \subseteq f^{-1}*B)$.

88. Niech $a \neq b$, zaś $X = \{a, b, \{a,b\}\}$, $Y = \{a, b\}$. Sprawdzić, czy relacja

$$R = \{(a,a), (b,a), (\{a,b\}, b)\}$$

jest funkcją. Wyznaczyć $f*\{a,b\}$, $f^{-1}*\{a,b\}$.
Odp. $f*\{a,b\} = \{a\}$.

89. Niech $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_0^+$ będzie odwzorowaniem zadanym wzorem:

$$f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|.$$

a) Czy odwzorowanie *f* jest surjekcją ?
b) Czy odwzorowanie *f* jest iniekcją ?
c) Wyznaczyć $f^{-1}*\{0\}$;
d) Wyznaczyć $f*(2,\infty)$;
e) Wyznaczyć $f^{-1}*(0,1)$;
f) Wyznaczyć $f*\{0,1,2,3\}$.

Odp. a) Tak; b) Nie; c) $\{2,3\}$; d) Ponieważ $[3,\infty) \subset [2,\infty)$, zatem także $f*[3,\infty) \subset f*[2,\infty)$, ale $f*[3,\infty) = \mathbf{R}_0^+$, stąd także $f*[2,\infty) = \mathbf{R}_0^+$;
e) $((5-\sqrt{5})/2, (5+\sqrt{5})/2) \setminus \{2,3\}$; f) $\{0,2,6\}$.

90. Określić bijekcję między zbiorami $\underset{i=1}{\overset{n}{\times}}\{1, 2,...., m_i\}$ i $\{1,2,...,\prod_{i=1}^{n} m_i\}$, ($m_1 \geq 1$).

91. Niech $f : \mathbf{N}_0^2 \to \mathbf{N}_0$ będzie przekształceniem zadanym wzorem:

$$f(x, y) = \max\{x, y\}.$$

a) Czy odwzorowanie *f* jest surjekcją ?
b) Czy odwzorowanie *f* jest iniekcją ?
c) Wyznaczyć $f^{-1} * \{0\}$;
d) Wyznaczyć $f^{-1} * \{k\}$;
e) Wyznaczyć $f * (\mathbf{PN} \times \mathbf{N})$.

Odp. a) Tak, $x = f(x, x)$; b) Nie, $f(1, 2) = f(2, 2) = 2$; c) $\{(0, 0)\}$;
d) $\{\{k\} \times \{1, 2,..., k\}\} \cup \{\{1, 2,..., k\} \times \{k\}\}$; e) **N**.

92. Niech $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ będzie przekształceniem zadanym wzorem:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + (y-1)^2, & \text{gdy } x \leq y, \\ x^2 - y + 1, & \text{gdy } x > y, \end{cases}$$

a) Czy odwzorowanie *f* jest surjekcją ?
b) Czy odwzorowanie *f* jest iniekcją ?
c) Czy istnieje funkcja odwrotna do funkcji *f* ?
d) Wyznaczyć $f^{-1} * \{10\}$;
e) Wyznaczyć $f * (\{1\} \times \mathbf{N})$;
f) Wyznaczyć $f * (\mathbf{N} \times \{1\})$.

93. Niech X będzie przestrzenią wektorową $\mathbf{R}^3$, zaś odwzorowanie $\varphi : X \to X$ będzie określone wzorem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times [0, 0, 1]$;

a) Czy odwzorowanie φ jest surjekcją ?
b) Czy odwzorowanie φ jest iniekcją ?
c) Wyznaczyć $\varphi^{-1} * \{[0, 0, 0]\}$;
d) Wyznaczyć obraz zbioru wektorów postaci $[0, t, 0]$, $t \in \mathbf{R}$;
e) Wyznaczyć $\varphi^{-1} * \{[0, 0, t] : t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$;

Odp.: a) Nie. Na przykład wektor [0, 0, 1] nie jest wartością podanej funkcji, ponieważ nie jest prawdą, że wektor [0, 0, 1] jest sam do siebie prostopadły; b) Nie, $f([0, 0, 1]) = f([0, 0, 2]) = [0, 0, 0]$; c) $\{[0, 0, k] : k \in \mathbf{R}\}$; d) $\{[a, 0, 0] : a \in \mathbf{R}\}$; e) $\varnothing$.

94. Niech X będzie przestrzenią wektorową $\mathbf{R}^n$, gdzie $n > 0$, zaś odwzorowanie $\varphi \in \mathbf{R}^X$ dane będzie wzorem

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

a) Czy odwzorowanie φ jest surjekcją ?
b) Czy odwzorowanie φ jest iniekcją ?
c) Wyznaczyć $\varphi^{-1} * \{-1\}$;

d) Wyznaczyć $\varphi^{-1} * \{0\}$;

e) $\varphi^{-1} * \{1\}$.

Odp. a) Nie; $\varphi * X = \mathbf{R}^+$; b) Nie. Dla dowolnego wektora **x** mamy $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(-\mathbf{x})$; c) $\varnothing$; d) Wektor [0,...,0]; e) Jest to powierzchnia kuli w $\mathbf{R}^n$ o promieniu 1.

95. Niech $f_\alpha : [a,b] \to [0,1]$, dla $\alpha > 0$, $a, b \in \mathbf{R}$ oraz $a < b$ będzie rodziną przekształceń zadanych wzorem:

$$\text{i) } f_\alpha(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^\alpha \text{; ii) } f_\alpha(x) = \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^\alpha .$$

a) Czy dla każdej wartości parametru $\alpha > 0$ przekształcenie f_α jest surjekcją przedziału $[a,b]$ na przedział $[0,1]$?

b) Czy dla każdej wartości parametru $\alpha > 0$ przekształcenie f_α jest iniekcją przedziału $[a,b]$ w przedział $[0,1]$?

c) Czy dla każdej wartości parametru $\alpha > 0$ f_α jest przekształceniem monotonicznym przedziału $[a,b]$ w przedział $[0,1]$?

d) Naszkicować wykres funkcji dla $\alpha = 2$.

e) Czy istnieje rodzina przekształceń odwrotnych ? Jeśli tak, to ją wyznaczyć.

f) Wyznaczyć obraz zbioru $A = [a, (a+b)/2)]$.

g) Wyznaczyć przeciwobraz zbioru $B = \{1/4,\ 1/2,\ 3/4\}$.

96. Niech $f_{\alpha,\beta} : [0,\infty) \to [0,1]$, dla $\alpha > 0, \beta > 0$, będzie dwuparametrową rodziną przekształceń zadanych wzorem:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right)$$

a) Czy dla wszystkich dodatnich wartości parametrów przekształcenie $f_{\alpha,\beta}$ jest surjekcją przedziału $[0,\infty)$ na przedział $[0,1]$?

b) Czy dla każdej wartości parametru $\alpha > 0$ przekształcenie f_α jest iniekcją przedziału $[0,\infty)$ w przedział $[0,1]$?

c) Czy dla wszystkich dodatnich wartości parametrów przekształcenie $f_{\alpha,\beta}$ jest przekształceniem monotonicznym przedziału $[0,\infty)$ w przedział $[0,1]$?

d) Naszkicować wykres funkcji dla $\alpha = 2, \beta = 1$.

e) Czy istnieje rodzina przekształceń odwrotnych ? Jeśli tak, to ją wyznaczyć.

f) Wyznaczyć obraz zbioru $A = [0, \beta]$.

g) Wyznaczyć przeciwobraz zbioru $B = \{1/4,\ 1/2,\ 3/4\}$.

97. Znaleźć złożenie $g \circ f$ oraz obrazy $(g \circ f) * A$, $(g \circ f) * B$, jeżeli:

a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ oraz $f(x) = x+1$, $g(x) = \mathbf{E}(x - 1/3)$, $A = [0,1), B = \mathbf{R}^+$;

b) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$, $g : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ oraz $f(x,y) = x + iy$, $g(x) = |x| + 1$, $A = (0,1) \times [0,1]$, $B = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 2\}$.

c) $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ oraz $f(n) = \sqrt{n}$, $g(x) = x^4 - x^2$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1\}$.

Odp. a) $(g\circ f)(x)=E\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$, $(g\circ f)*A=\{0,1\}$, $(g\circ f)*\mathbf{R}=\mathbf{N}$;

b) $(g\circ f)(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+1$, $(g\circ f)*A=(1,1+\sqrt{2})$, $(g\circ f)*B=(1,1\sqrt{2})$.

c) $(g\circ f)(n)=n^2-n$, $(g\circ f)*A=\{2,12,30,56,90\}$, $(g\circ f)*B=\{0\}$.

98. Zdefiniować bijekcje między podzbiorami A i B zbioru liczb rzeczywistych i wykazać poprawność definicji, jeżeli:

a) $A=[0,1]$, $B=[0,1)$;
b) $A=[a,b]$, $B=[a,b)$;
c) $A=[0,1]$, $B=(0,1)$;
d) $A=[0,1]$, $B=(0,1/2)\cup(1/2,1)$;
e) $A=\mathbf{R}$, $B=\mathbf{R}\setminus\{0\}$;
f) $A=\mathbf{R}$, $B=\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$.

Rozwiązanie: a) Funkcję $f:\ [0,1]\to[0,1)$ określamy następująco:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{dla } x\in\{1,1/2,1/4,...\}\\ x & \text{w p.p.}\end{cases}$$

99. Niech $J_{2\times1}:\ \mathbf{N}_0^2\to\mathbf{N}_0$ będzie przekształceniem zadanym wzorem:

$$\text{i) } J_{2\times1}(x_1,x_2)=\frac{(x_1+x_2+1)(x_1+x_2)}{2}+x_1,\ \text{ii) } J_{2\times1}(x_1,x_2)=\binom{x_1+x_2+1}{2}+x_1$$

a) Dowieść, że funkcja $J_{2\times1}$ jest wzajemnie jednoznaczna.
b) Dowieść, że zbiór wartości funkcji $J_{2\times1}$ jest identyczny ze zbiorem $\mathbf{N}_0$.
c) Czy istnieje funkcja odwrotna do $J_{2\times1}$?
d) Wyznaczyć obraz zbioru

$$A=\{(0,0),(0,1),(1,0),(0,2),(2,0),(1,1),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$$

e) Wyznaczyć obraz elementu (100, 100).

Uwaga. Zauważmy, że obie funkcje definiują to samo przekształcenie.

Rozwiązanie. a) Wykażemy że funkcja $J_{2\times1}$ jest różnowartościowa. Załóżmy, że

$$J_{2\times1}(x_1,x_2)=J_{2\times1}(y_1,y_2)$$

Wykażemy najpierw, że $x_1=y_1$. Istotnie, gdyby np. było $x_1>y_1$, to $x_1=y_1+r$, $r>0$, a więc otrzymalibyśmy

$$(*)\ \binom{y_1+r+x_2+1}{2}+r=\binom{y_1+y_2+1}{2},$$

stąd wynikałoby $y_2>r+x_2$, gdyż $\binom{x}{2}$ jest funkcją rosnącą. Zatem $y_2=r+x_2+s$, gdzie $s>0$. Wstawiając do wzoru (*) i przyjmując $c=y_1+r+x_2+1$ otrzymalibyśmy

$$\binom{c}{2} + r = \binom{c+s}{2}.$$

Jest to jednak niemożliwe, gdyż $r < c$, a więc

$$\binom{c}{2} + r < \binom{c}{2} + c = \binom{c+1}{2} \le \binom{c+s}{2}.$$

W podobny sposób wykazujemy, że nie może być $x_1 < y_1$. Zatem $x_1 = y_1$ i otrzymujemy

$$\binom{y_1 + x_2 + 1}{2} = \binom{y_1 + y_2 + 1}{2}$$

Stąd $x_2 = y_2$. Funkcja $J_{2\times 1}$ jest więc wzajemnie jednoznaczna.

b) Wykażemy teraz, że zbiór Z wartości $J_{2\times 1}$ jest identyczny z **N**. Z równości $J_{2\times 1}(0, 0) = 0$ i $J_{2\times 1}(0, 1) = 1$ wynika, że $0, 1 \in Z$. Załóżmy, że $n \in Z$, tj. że $n = J_{2\times 1}(x, y)$ dla pewnych *x* i *y*. Jeśli $y > 0$, to

$$n + 1 = J_{2\times 1}(x, y) + 1 = \binom{x + y + 1}{2} + x + 1 = \binom{(x+1) + (y-1) + 1}{2} + (x+1) = J_{2\times 1}(x+1, y-1) \in Z.$$

Jeśli $y = 0$, to

$$n = \binom{x}{2} + x = \binom{x+1}{2}, \text{ a więc } n + 1 = \binom{x+1}{2} + 1.$$

Zakładając, że $x > 0$, możemy liczbę przedstawić w postaci

$$\binom{1 + (x-1) + 1}{2} + 1 = J_{2\times 1}(1, x-1)$$

stąd $n + 1 \in Z$. Wreszcie, jeśli $x = y = 0$, to $n = 0$ i $n + 1 = 1$, a więc $n + 1 \in Z$. Na mocy zasady indukcji wykazaliśmy, że $Z = \mathbf{N}_0$.

c) Na mocy twierdzenia 7.6 wynika, że istnieją funkcje K, L odwzorowujące $\mathbf{N}_0$ na $\mathbf{N}_0$ takie, że $J_{21}(K(x), L(x)) = x$; a z uwagi, że $x \le J_{2\times 1}(x, y)$ i $y \le J_{2\times 1}(x, y)$ funkcje te spełniają przy tym nierówność

$$K(x) \le x,\ L(x) \le x.$$

Sens intuicyjny funkcji $J_{2\times 1}, K, L$ możemy sobie łatwo uzmysłowić, ustawiając pary (x, y) liczb naturalnych w nieskończoną tablicę

$$\begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

i porządkując je następnie w zwykły ciąg

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), \dots$$

Para (x, y) stoi w tym ciągu na miejscu $J_{2\times 1}(x, y)$. Para, która występuje w tym ciągu na miejscu *n*, występuje w tablicy w wierszu o numerze $K(n)+1$ i w kolumnie o numerze $L(n)+1$.

d) Ponieważ funkcja $J_{2\times 1}(x, y)$ jest różnowartościowa, więc obraz zbioru *A* jest równy zbiorowi wartości tej funkcji odpowiadających elementom zbioru *A*.

$$J_{2\times 1} * \{(0,0),(0,1),(1,0),(0,2),(2,0),(1,1),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\} =$$
$$\{J_{2\times 1}(0,0), J_{2\times 1}(0,1), ..., J_{2\times 1}(3,0)\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

e) Obraz elementu (100, 100) jest obrazem zbioru jednoelementowego $\{(100,100)\}$.

$$J_{2\times 1} * \{(100,100)\} = \{J_{2\times 1}(100,100)\} = \{20200\}.$$

100. Przekształcenie $J_{1\times 2}$ zbioru $\mathbf{N}_0$ w zbiór $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ jest określone wzorem:

$$J_{1\times 2}(x) = \left(x - \frac{y(y-1)}{2}, \frac{y(y+1)}{2} - x - 1 \right)$$

gdzie $y \in \mathbf{N}_0$ spełnia warunek

$$\frac{y(y-1)}{2} \le x < \frac{y(y+1)}{2}$$

a) Udowodnić, że $J_{1\times 2}$ jest odwzorowaniem różnowartościowym.
b) Udowodnić, że zbiór wartości funkcji $J_{1\times 2}$ jest identyczny ze zbiorem $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$.
c) Czy istnieje funkcja odwrotna do $J_{1\times 2}$?
d) Wyznaczyć obraz zbioru $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
e) Wyznaczyć obraz elementu 1000.
f) Wyznaczyć złożenie funkcji $J_{2\times 1} \circ J_{1\times 2}$ oraz $J_{1\times 2} \circ J_{2\times 1}$.

101. Określić bijekcje *J* pomiędzy zbiorami :
a) $\mathbf{N}_0^3$ i $\mathbf{N}_0^2$;
b) $\mathbf{N}_0^3$ i $\mathbf{N}_0$ i obliczyć obraz zbioru $\{(5,5,5)\}$
c) $\mathbf{N}_0^k$ i $\mathbf{N}_0^{k-1}$, $k \ge 3$ i obliczyć obraz zbioru $\{(5,5,5,5)\}$
d) $\mathbf{N}_0^k$ i $\mathbf{N}_0$, $k \ge 3$ i obliczyć obraz zbioru $\{(5,5,5,5)\}$
e) wszystkich ciągów skończonych o wyrazach naturalnych i zbioru liczb naturalnych;
f) $\mathbf{N}_0^k \times \mathbf{N}_0^k$ i $\mathbf{N}_0^k$;
g) $\mathbf{N}_0^{\mathbf{N}_0} \times \mathbf{N}_0^{\mathbf{N}_0}$ i $\mathbf{N}_0^{\mathbf{N}_0}$.

Rozwiązania.
a) Niech funkcja $J_{3\times 2} : \mathbf{N}_0^3 \to \mathbf{N}_0^2$ określona będzie wzorem:

$$J_{3\times 2}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, J_{2\times 1}(x_2, x_3))$$

gdzie *J* jest funkcją pary. Tak określona funkcja jest iniekcją, bo jeżeli

$$(x_1, x_2, x_3) \ne (y_1, y_2, y_3),$$

to zawsze

$$J_{3\times 2}(x_1,x_2,x_3)=(x_1,J_{2\times 1}(x_2,x_3))\neq(y_1,J_{2\times 1}(y_2,y_3))=J_{3\times 2}(y_1,y_2,y_3)$$

Funkcja ta jest również surjekcją, bo dla dowolnej pary $(y,z)\in\mathbf{N}_0^2$ dla poprzednika y istnieje liczba x_1 taka, że $x_1=I_{\mathbf{N}_0}^{-1}(y)$, a dla następnika z istnieje para liczb $(x_2,x_3)\in\mathbf{N}_0^2$ taka, że $z=J_{2\times 1}(x_2,x_3)$. Stąd wynika, że istnieje trójka liczb $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{N}_0^3$ taka, że

$$J_{3\times 2}(x_1,x_2,x_3)=(x_1,J_{2\times 1}(x_2,x_3))=(y,z)\in\mathbf{N}_0^2$$

Zatem funkcja $J_{3\times 2}$ jest bijekcją między zbiorami $\mathbf{N}_0^3$ i $\mathbf{N}_0^2$.

b) Funkcje $J_{2\times 1}:\ \mathbf{N}_0^2\to\mathbf{N}_0$, $J_{3\times 2}:\ \mathbf{N}_0^3\to\mathbf{N}_0^2$ są bijekcjami, więc ich złożenie

$$J_{3\times 1}=J_{2\times 1}\circ J_{3\times 2}:\ \mathbf{N}_0^3\to\mathbf{N}_0$$

jest bijekcją między zbiorami $\mathbf{N}_0^3$ i $\mathbf{N}_0$. Dla funkcji pary $J_{2\times 1}(x_1,x_2)=\binom{x_1+x_2+1}{2}+x_1$ otrzymujemy

$$J_{3\times 1}(x_1,x_2,x_3)=J_{2\times 1}(x_1,J_{2\times 1}(x_2,x_3))=J_{2\times 1}\left(x_1,\binom{x_2+x_3)+1}{2}+x_2\right)$$

$$=\binom{x_1+x_2+\binom{x_2+x_3+1}{2}+1}{2}+x_1$$

$$J_{3\times 1}(5,5,5)=\binom{11+\binom{11}{2}}{2}+5=\binom{66}{2}+5=2145+5=2150$$

c) Funkcja $J_{k\times k-1}:\ \mathbf{N}_0^k\to\mathbf{N}_0^{k-1}$, $k\geq 3$ określona wzorem:

$$J_{k\times k-1}(x_1,x_2,...,x_k)=(x_1,x_2,...,x_{k-2},J_{2\times 1}(x_{k-1},x_k))$$

jest bijekcją.

d) Funkcję $J_{k\times 1}:\ \mathbf{N}_0^k\to\mathbf{N}_0$ określamy za pomocą złożenia bijekcji $J_{k\times k-1}$ dla $k\geq 2$ wzorem:

$$J_{k\times 1}(x_1,x_2,...,x_k)=J_{2\times 1}\circ J_{3\times 2}\circ...\circ J_{k\times k-1}(x_1,x_2,...,x_k)$$

Podstawiając definicje funkcji $J_{k\times k-1}$ dla $k\geq 3$ otrzymujemy:

$$J_{k\times 1}(x_1,x_2,...,x_k)=J_{2\times 1}(x_1,J_{2\times 1}(x_2,J_{2\times 1}(...(J_{2\times 1}(x_{k-1},x_k))...)))$$

$$=J_{2\times 1}(x_1,J_{k-1\times 1}(x_2,...,x_{k-1},x_k))$$

Tym samym bijekcja między zbiorami $\mathbf{N}_0^k$ i $\mathbf{N}_0$ została zdefiniowana za pomocą bijekcji $J_{2\times 1}$. Obliczamy wartość funkcji dla $(5,5,5,5)$

$$J_{4\times 1}(5,5,5,5)=J_{2\times 1}(5,J_{3\times 1}(5,5,5))=J_{2\times 1}(5,2150)=\binom{2156}{2}+5=2323095$$

102. Określić bijekcję między podanymi zbiorami.

a) $A = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x < 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x < 1 \wedge 0 \leq y < 1\}$;

b) $A = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x < 1\}$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x < 1 \wedge 0 \leq y < 1 \wedge 0 \leq z < 1\}$;

c) $A = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x < 1\}$, $B = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n : \underset{i=1,...,n}{\forall} 0 \leq x_i < 1\}$.

Rozwiązanie. a) Określamy funkcję

$$B \ni (x, y) \to z = f(x, y) \in A .$$

Ponieważ współrzędne kwadratu $x, y \in [0,\ 1)$, więc można je zapisać w postaci nieskończonych ułamków dziesiętnych, przy czym ułamki te nie mogą mieć na końcu samych dziewiątek. Podzielimy teraz cyfry występujące w rozwinięciach dziesiętnych liczb x i y na grupy za pomocą kreski pionowej stawianej po każdej cyfrze różnej od dziewiątki. Jeśli na przykład

$$x = 0{,}3994599967... ,\ y = 0{,}959978090... ,$$

to podział ten ma postać następującą:

$$x \to 3|\ 994|\ 5|\ 9996|\ 7|\ ...,\ y \to 95|\ 997|\ 8|\ 0|\ 90|\ ...$$

Będziemy teraz przetasowywali otrzymane grupy cyfr. Otrzymamy ciąg nieskończony grup cyfr

$$3|\ 95|\ 994|\ 997|\ 5|\ 8|\ 9996|\ 0|\ 7|\ 90|...$$

Stawiając przed tym ciągiem zero i opuszczając kreseczki, otrzymamy ułamek dziesiętny, który jest wartością funkcji

$$z = 0{,}3959949975899960790...$$

Skonstruowana odpowiedniość między punktami kwadratu i punktami odcinka jest wzajemnie jednoznaczna.