

PROBLEMY I ZADANIA TM (103-115)

VIII. RÓWNOLICZNOŚĆ ZBIORÓW

103. Wykazać, że relacja równoliczności zbiorów jest relacją równoważności.

104. Wykazać równoliczność przedziałów rzeczywistych $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$, gdzie $a < b$ i $c < d$.

Rozwiązanie. Wykażemy, że funkcja $f \in Y^X$ określona dla każdego $x \in X$ formułą

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$$

jest iniekcją i surjekcją zbioru X na Y . W dowodzie iniekcji dla $x_1, x_2 \in [a, b]$ oraz $x_1 \neq x_2$ winniśmy pokazać, że $f(x_1) \neq f(x_2)$. Zamiast tego wykażemy, że jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to $x_1 = x_2$. Niech więc $f(x_1) = f(x_2)$. Mamy wówczas

$$f(x_1) = f(x_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{d-c}{b-a}(x_1-a) + c = \frac{d-c}{b-a}(x_2-a) + c \Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a}(x_1-a) = \frac{d-c}{b-a}(x_2-a)$$

$$x_1 - a = x_2 - a \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Dla wykazania surjekcji wystarczy zauważyć, że dla dowolnego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ takie, że $y = f(x)$. Mianowicie

$$x = \frac{b-a}{d-c}(y-c) + a$$

Dowodzi to, że $X \cong Y$.

105. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A i B istnieją zbiory C i D takie, że

$$A \cong C, B \cong D, C \cap D = \emptyset.$$

Odp. Np. zbiory $C = A \times \{1\}$ i $D = B \times \{2\}$ spełniają żądane warunki.

106. Skonstruować bijekcję $f: A \rightarrow B$, gdzie A jest kołem o promieniu 1, a B jest kwadratem opisanym na tym kole. Wyznaczyć obraz brzegu koła. Wyznaczyć obraz zbioru $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$

Rozwiązanie. Niech

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}.$$

Ze względu na symetrię opis przekształcenia ograniczymy tylko do odwzorowania jednej ósmej części koła w jedną ósmą część kwadratu. Punkтови P o współrzędnych biegunowych (r, φ) , $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \pi/4)$ przyporządkujemy punkt o współrzędnych kartezjańskich (x, y) za pomocą wzorów:

$$\begin{cases} x = r \\ y = \frac{4}{3}r\varphi \end{cases}$$

Tak określone przekształcenie jest bijekcją, która ma dodatkowo własność ściśle obowiązującej skali, tj. podzbiory koła o równych polach mają obrazy o równych polach. Obrazem brzegu koła jest brzeg kwadratu. Obrazem zbioru C jest zbiór

$$f * C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1/2 \leq |x| \leq 1 \wedge 1/2 \leq |y| \leq 1\}.$$

107. Udowodnić, że podane zbiory X i Y są równoliczne:

- $X = \{a, b, 1, 2\}$, $Y = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$;
- $X = \{x \in \mathbf{N} : 10|x\}$, $Y = \mathbf{N}$;
- $X = \mathbf{NN}$ (zbiór liczb naturalnych nieparzystych), $Y = \mathbf{N}$;
- $X = \mathbf{Z}$ (zbiór liczb całkowitych), $Y = \mathbf{N}$;
- $X = \mathbf{N}^2$ (zbiór par liczb naturalnych), $Y = \mathbf{N}$.

Wskazówki. c) Funkcja $f(n) = 2n - 1$ ustala równoliczność zbiorów \mathbf{N} i \mathbf{NN} ;

d) Funkcja $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ określona następująco: $f(0) = 1$, $f(k) = 2k$, $f(-k) = 2k + 1$ dla $k = 1, 2, \dots$ ustala równoliczność;

e) Określamy przekształcenie f zbioru $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ w \mathbf{N} jako złożenie funkcji $J_{2 \times 2}$, $J_{2 \times 1}$, $J_{1 \times 1}$ takie, że

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \xrightarrow{J_{2 \times 2}} \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \xrightarrow{J_{2 \times 1}} \mathbf{N}_0 \xrightarrow{J_{1 \times 1}} \mathbf{N},$$

gdzie dla $(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ funkcja $J_{2 \times 2}$ jest określona wzorem $J_{2 \times 2}(x, y) = (x - 1, y - 1)$,

dla $(x, y) \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ funkcja $J_{2 \times 1}$ jest określona wzorem $J_{2 \times 1}(x, y) = \frac{(x + y + 1)(x + y)}{2} + x$,

dla $x \in \mathbf{N}_0$ funkcja $J_{1 \times 1}$ jest określona wzorem $J_{1 \times 1}(x) = x + 1$

Funkcja f określona jako złożenie $f = J_{1 \times 1} \circ J_{2 \times 1} \circ J_{2 \times 2}$ przyjmuje postać:

$$f(x, y) = \frac{(x + y - 1)(x + y - 2)}{2} + x$$

Tak określona funkcja f jest przekształceniem wzajemnie jednoznaczny z zbioru $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ na \mathbf{N} . Stąd mamy równoliczność $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \sim \mathbf{N}$, czyli zbiór $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ jest przeliczalny.

108. Skale temperatur Celsjusza (C), Reaumura (R) i Fahrenheita (F) są skalami liniowymi, o których wiadomo, że

$$100^\circ C = 80^\circ R = 212^\circ F,$$

$$0^\circ C = 0^\circ R = 32^\circ F.$$

- Wyznaczyć zależności między temperaturami mierzonymi różnymi termometrami.
- Termometr pozwala dokonać pomiaru temperatury w zakresie $(-40, 50)^\circ C$. Wyznaczyć odpowiadające mu zakresy pomiarów w skalach R i F .
- Temperatura w skali Fahrenheita wynosi 100° . Ile wynosi temperatura w skali Celsjusza, a ile w skali Reaumura?

Odp.: a) $R = 0,8C$, $F = 1,8C + 32$, $F = 2,25R + 32$; b) $(-32, 40)^\circ R$, $(-40, 122)^\circ F$; c)

$$100^\circ F = 37\frac{7}{9}^\circ C, \quad 100^\circ F = 30\frac{2}{9}^\circ R.$$

109. Udowodnić, że podane zbiory X i Y są równoliczne:

- a) $X = \{x \in \mathbf{R} : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$, $Y = \mathbf{R}$;
- b) $X = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ gdzie $a < b$, $Y = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1\}$;
- c) $X = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$, $Y = \mathbf{R}$;
- d) $X = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$, $Y = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1\}$;
- e) $X = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$, $Y = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ dla $a < b$;
- f) $X = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$, $Y = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ dla $a < b$;
- g) $X = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$ dla $a < b$, $Y = \mathbf{R}$;
- h) $X = \{x \in \mathbf{Q} : a \leq x \leq b\}$ dla $a < b$, $Y = \mathbf{N}$;
- i) $X = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $Y = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \forall_{i=1, \dots, n} 0 \leq x_i \leq 1\}$.

Wskazówki. a) Równoliczność przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ze zbiorem \mathbf{R} ustala funkcja tangens;

b) Równoliczność przedziału (a, b) z przedziałem $(0, 1)$ ustala funkcja liniowa

$$(0, 1) \ni x \mapsto f(x) = a + (b - a)x \in (a, b).$$

c) Równoliczność przedziału $(0, \infty)$ ze zbiorem \mathbf{R} ustala funkcja

$$(0, \infty) \ni x \mapsto f(x) = \ln x \in \mathbf{R}$$

g) Wystarczy wykorzystać fakt, że $(-\pi/2, \pi/2) \cong \mathbf{R}$ i $[a, b] \cong (-\pi/2, \pi/2)$.

h) Niech x_i i y_i będą liczbami wymiernymi takimi, że $a < x_1 < y_1 < b$. Funkcja f określona wzorem

$$f(0) = (x_1 + y_1)/2, \quad f(n+1) = (x_1 + f(n))/2.$$

jest iniekcją ze zbioru liczb naturalnych \mathbf{N} w przedział $[a, b]$. Z drugiej strony $[a, b] \cap \mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}$.

110. Wykazać równoliczność zbiorów.

- a) Zbiór punktów kwadratu i zbiór punktów należących do jednego z jego boków.
- b) Zbiory punktów dwóch okręgów.
- c) Zbiór punktów kwadratu i płaszczyzny.

Wskazówki. a) Wystarczy zauważyć że $[0, 1]^2 \cong [0, 1]$; b) Wystarczy rozpatrzeć dwa okręgi, np. o środkach w początku układu współrzędnych i promieniach r_1, r_2 . Punktowi $(r_1 \cos \varphi, r_1 \sin \varphi)$ przyporządkowujemy punkt $(r_2 \cos \varphi, r_2 \sin \varphi)$; c) Wynika z $[a, b] \cong \mathbf{R}$.

111. Wykazać, że zbiory

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ i } B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\pi\}$$

są równoliczne.

112. Wykazać własności relacji równoliczności. Dla dowolnych zbiorów $X, Y, W, Z, T, \{y\}$ zachodzą własności:

- $X \times Y \cong Y \times X$,
- $X \times (Y \times Z) \cong (X \times Y) \times Z$,
- $(X \cong Y \wedge W \cong Z) \rightarrow X \times W \cong Y \times Z$,
- $(X \cong Y \wedge W \cong Z \wedge X \cap W = \emptyset = Y \cap Z) \rightarrow X \cup W \cong Y \cup Z$,
- $X \times \{y\} \cong X \cong X^{\{y\}}$,
- $\{y\}^X \cong \{y\}$,
- $X \cong Y \rightarrow 2^X \cong 2^Y$,
- $Y^{X \times T} \cong (Y^X)^T$,
- $(Y \times Z)^X \cong Y^X \times Z^X$,
- $X \cap T = \emptyset \rightarrow Y^{X \cup T} \cong Y^X \times Y^T$,
- $(X \cong W \wedge Y \cong Z) \rightarrow X^Y \cong W^Z$.

Dowody. c) Z założenia, że $X \cong Y$ i $W \cong Z$ wynika, że istnieją bijekcje

$$f: X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y \text{ i } g: W \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Z.$$

Określamy odwzorowanie $h: X \times W \rightarrow Y \times Z$ wzorem

$$h(x, w) = (f(x), g(w)).$$

Pozostaje wykazać, że tak określone odwzorowanie h jest bijekcją.

d) Z założenia, że $X \cong Y$ i $W \cong Z$ wynika, że istnieją bijekcje

$$f: X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y \text{ i } g: W \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Z.$$

Z założenia, że $X \cap W = \emptyset$ wynika, że dla dowolnego $x \in X \cup W$ zachodzi dokładnie jedna z możliwości: albo $x \in X$ albo $x \in W$. W celu ustalenia równoliczności $X \cup W \cong Y \cup Z$ określamy funkcję $h: X \cup W \rightarrow Y \cup Z$ dla $x \in X \cup W$ wzorem:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in X \\ g(x) & \text{dla } x \in W \end{cases}$$

Pozostaje sprawdzić, że tak określona funkcja h przekształca zbiór $X \cup W$ na $Y \cup Z$ jednoznacznie.

e) Dla ustalenia równoliczności zbiorów X i $X^{\{y\}}$ zauważmy najpierw, że zbiór $X^{\{y\}}$ jest zbiorem wszystkich odwzorowań $g: \{y\} \rightarrow X$ ze zbioru jednoelementowego $\{y\}$ w zbiór X . Funkcję g dla której $g(y) = x$ oznaczamy g_x . Określamy odwzorowanie $f: X \rightarrow X^{\{y\}}$ dla $x \in X$ formułą

$$f(x) = g_x.$$

Pozostaje wykazać, że tak określone odwzorowanie f ustala równoliczność badanych zbiorów.

g) Jeżeli $X \cong Y$, to istnieje bijekcja $f: X \rightarrow Y$. Dla ustalenia równoliczności zbiorów 2^X i 2^Y określamy dla każdego $A \in 2^X$ funkcję $h: 2^X \rightarrow 2^Y$ wzorem:

$$h(A) = f * A.$$

Pozostaje wykazać, że tak określona funkcja h jest bijekcją.

k) Mamy wykazać implikację: $(X \cong W \wedge Y \cong Z) \rightarrow (X^Y \cong W^Z)$. Ponieważ

$$X \cong W \wedge Y \cong Z,$$

więc istnieją funkcje

$$f \in W^X, g \in Z^Y$$

ustalające równoliczność zbiorów X i W oraz Y i Z . Utwórzmy złożenie funkcji $g^{-1} \in Y^Z$, $h \in X^Y$ i $f \in W^X$ postaci

$$f \circ h \circ g^{-1} \in W^Z.$$

Funkcję ustalającą równoliczność określamy wzorem:

$$z(h) = f \circ h \circ g^{-1}.$$

Łatwo sprawdzić, że dla funkcji $w \in W^Z$ zachodzi równość

$$z(f^{-1} \circ w \circ g) = w,$$

istnieje więc funkcja odwrotna

$$z^{-1}(w) = f^{-1} \circ w \circ g.$$

Różnowartościowość funkcji z jest oczywista. Stąd z jest funkcją wzajemnie jednoznaczłą, przekształcającą X^Y na W^Z .

113. (Pierwsze twierdzenie Cantora-Bernsteina). Wykazać, że dla dowolnych zbiorów X, Y, Z zachodzi własność:

$$(X \subseteq Y \subseteq Z) \rightarrow (X \cong Z \rightarrow Y \cong Z)$$

Czy prawdziwa jest implikacja przeciwna ?

Dowód. Niech $X \subseteq Y \subseteq Z$ oraz $X \cong Z$, wówczas istnieje bijekcja $f: Z \xrightarrow[na]{1-1} X$. Określamy indukcyjnie ciąg zbiorów:

$$A_0 = Y \setminus X,$$

$$A_{n+1} = f^*(A_n).$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi zawieranie $A_n \subseteq Y$, stąd na mocy założenia $A_n \subseteq Z$ oraz

$$A_0 \cap X = \emptyset \text{ i } A_n \subseteq X,$$

a więc

$$A_n \cap A_0 = \emptyset \text{ dla } n = 1, 2, \dots$$

Niech

$$S = \bigcup_{n=0,1,\dots} A_n$$

Wtedy

$$f^*(S) = \bigcup_{n=0,1,2,\dots} f^*(A_n) = \bigcup_{n>0} A_n = S \setminus A_0$$

Stąd

$$S = f^*(S) \cup A_0$$

Określamy funkcję $g : Z \rightarrow Y$ wzorem:

$$(*) \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in S, \\ f(x) & \text{dla } x \in Z \setminus S. \end{cases}$$

Pokażemy, że g jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem zbioru Z na Y .

(1) Najpierw wykażemy, że funkcja g jest różnowartościowa. Niech $x_1, x_2 \in Z$, $x_1 \neq x_2$.

Rozpatrujemy trzy możliwości:

jeżeli $x_1, x_2 \in S$, to $g(x_1) = x_1 \neq x_2 = g(x_2)$;

jeżeli $x_1, x_2 \in Z \setminus S$, to $g(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = g(x_2)$, bo funkcja f jest różnowartościowa;

jeżeli $x_1 \in S$, $x_2 \in Z \setminus S$ lub przeciwnie, to $g(x_1) = x_1 \in S$, natomiast $g(x_2) \notin S$.

Korzystając z rozłączności zbiorów A_0 i X oraz z różnowartościowości funkcji f , mamy

$$\begin{aligned} g(x_2) = f(x_2) \in f^*(Z \setminus S) &= f^*(Z) \setminus f^*(S) = X \setminus f^*(S) = (X \setminus A_0) \setminus f^*(S) = \\ &= X \setminus (f^*(S) \cup A_0) = X \setminus S \end{aligned}$$

Stąd $g(x_1) \neq g(x_2)$.

(2) Wykażemy, że funkcja g jest surjekcją. Zauważmy, że

$$g^*(S) = S \text{ i } g^*(Z \setminus S) = f^*(Z \setminus S).$$

Korzystając ze wzoru (*) i różnowartościowości funkcji f pokażemy, że $g^*(Z) = Y$,

$$\begin{aligned} g^*(Z) &= g^*(S) \cup g^*(Z \setminus S) = S \cup f^*(Z \setminus S) = A_0 \cup f^*(S) \cup f^*(Z \setminus S) = \\ &= A_0 \cup f^*(Z) = A_0 \cup X = (Y \setminus X) \cup X = Y \end{aligned}$$

To kończy dowód równoliczności zbiorów Y i Z .

114. Wykazać równoliczność zbiorów

$$[0, 1] = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}, \quad [0, 1]^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}.$$

115. Wykazać równoliczność zbiorów

$$[0, 1] = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}, \quad [0, 1]^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \forall_{i=1, \dots, n} 0 \leq x_i \leq 1\}.$$

Rozwiązanie. Dowód równoliczności przeprowadzamy w oparciu o pierwsze twierdzenie Cantora-Bernsteina. Najpierw zauważmy, że zbiór $[0, 1]$ jest równoliczny ze zbiorem

$$\underbrace{\{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_{(n-1)} \times [0, 1]$$

Rzeczywiście, funkcja

$$f : [0, 1] \rightarrow \{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\} \times [0, 1]$$

zdefiniowana dla każdego $x \in [0, 1]$ wzorem:

$$f(x) = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{(n-1)}, x$$

jest bijekcją. Ponieważ

$$[0, 1] \cong \{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\} \times [0, 1] \subset [0, 1]^n,$$

więc przedział $[0, 1]$ jest równoliczny z podzbiorem zbioru $[0, 1]^n$.

Wykażemy teraz, że zbiór $[0, 1]^n$ jest równoliczny z pewnym podzbiorem odcinka $[0, 1]$.

Niech $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$. Wtedy każda z liczb x_1, x_2, \dots, x_n posiada rozwinięcie dziesiętne postaci:

$$x_1 = 0, x_{11}x_{12}x_{13}\dots$$

$$x_2 = 0, x_{21}x_{22}x_{23}$$

.....

$$x_n = 0, x_{n1}x_{n2}x_{n3},$$

przy czym, jeżeli któraś z tych liczb ma dwa rozwinięcia w postaci ułamka dziesiętnego (np. $1/2 = 0,50000\dots$ lub $0,499999\dots$), to odrzucamy rozwinięcie, w którym nieskończenie wiele cyfr jest różnych od 9. Definiujemy funkcję

$$f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

dla każdego $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ wzorem:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, x_{11}x_{21}\dots x_{n1}x_{12}x_{22}\dots x_{n2}x_{13}x_{23}\dots$$

Łatwo wykazać, że tak określona funkcja f jest iniekcją, ale nie jest surjekcją. Na przykład punkt $z = 0,191919\dots$ powinniśmy otrzymać z pary $x = 0,111\dots$ i $y = 0,999\dots$ odpowiadającej punktowi na boku kwadratu, a umówiliśmy się, że takich punktów nie będziemy rozważali. Stąd otrzymujemy

$$[0, 1]^n \cong f * ([0, 1]^n) \subseteq [0, 1].$$

Zatem na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina $[0, 1] \cong [0, 1]^n$, co kończy dowód.