

PROBLEMY I ZADANIA TM (142-215)**X. SYSTEMY RELACYJNE**

142. Wykazać, że relacja \approx bycia systemami izomorficznymi jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.
(w)

143. Udowodnić twierdzenie: Na to, aby zbiory A i B były równoliczne potrzeba i wystarcza, by systemy relacyjne $\langle A, A \times A \rangle$ i $\langle B, B \times B \rangle$ były izomorficzne.

Niech $X \neq \emptyset$ oznacza dowolny zbiór.

144. W zbiorze $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych definiujemy binarną relację R następująco:

$$\forall_{(x_n)(y_n)} \forall (x_n) R(y_n) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \exists_{m \in \mathbf{N}} \forall_{n \in \mathbf{N}} (m \leq n \rightarrow x_n \leq y_n)$$

Zbadać, czy relacja ta jest semiporządkiem na zbiorze $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

145. Zbadać, czy system relacyjny $\langle \mathbf{N}, | \rangle$ jest posetem.

Odp. Jest, ponieważ relacja $\subseteq \mathbf{N}^2$ jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, natomiast nie jest losetem, bo relacja $|$ nie jest spójna w \mathbf{N} .

146. Czy zbiór \mathbf{R} jest współkońcowy i współpoczątkowy ze zbiorem liczb całkowitych?

147. Wskazać minimalne elementy systemu relacyjnego $\langle \mathbf{N} \setminus \{1\}, | \rangle$.

Odp. Wszystkie liczby pierwsze tj. 2, 3, 5, 7, 11, ...

148. Czy system relacyjny $\langle \mathbf{N} \setminus \{1\}, | \rangle$ ma element pierwszy i element ostatni?

149. Niech $A = \{6, 9, 15\}$. Wskazać ograniczenia górne i dolne zbioru A w systemie relacyjnym $\langle \mathbf{N}, | \rangle$. Wskazać kres górny i kres dolny.

Odp. Ograniczeniami górnymi tego zbioru w posecie $\langle \mathbf{N}, | \rangle$ są liczby 90, 180, 240, ..., $n \cdot 90$, ..., natomiast ograniczeniami dolnymi są liczby 1, 3. Kresem górnym zbioru $A = \{6, 9, 15\}$ w posecie $\langle \mathbf{N}, | \rangle$ jest liczba 90, natomiast kresem dolnym jest liczba 3.

150. Wykazać, że jeżeli system relacyjny $\langle X, R \rangle$ jest posetem i $A \subseteq X$, to podsystem $\langle A, R|_A \rangle$ jest również posetem.

151. Podać przykład łańcucha.

Odp. Zbiór $A = \{2, 4, 6, 8, 16\}$ jest łańcuchem w systemie $\langle \mathbf{N}, | \rangle$.

152. Podać przykład zbioru, który nie jest łańcuchem.

Odp. Zbiór $B = \{2, 4, 6, 8\}$ nie jest łańcuchem w systemie $\langle \mathbf{N}, | \rangle$.

153. Wykazać, że każdy podzbiór losetu jest łańcuchem.

154. Podać przykład antyłańcucha w posecie $\langle \mathbf{N}, | \rangle$.

Odp.: Zbiór $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

155. Wskazać bezpośrednie poprzedniki i bezpośrednie następniki w systemie relacyjnym $\langle \mathbf{N}^2, R \rangle$ z porządkiem R określonym formułą:

$$(n_1, m_1)R(n_2, m_2) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (n_1 \leq n_2 \wedge m_1 \leq m_2)$$

Odp.: Dla elementu $(1, 1)$ nie istnieje bezpośredni poprzednik, dla elementów $(1, 2)$ i $(2, 1)$ istnieją po jednym bezpośrednim poprzedniku, dla wszystkich pozostałych elementów istnieją po dwa bezpośrednie poprzedniki i dwa bezpośrednie następniki, np. dla elementu (n, m) bezpośrednimi następnikami są $(n+1, m)$ oraz $(n, m+1)$.

156. Wskazać bezpośrednie poprzedniki i bezpośrednie następniki w systemie relacyjnym $\langle (1/n)_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}; \leq \rangle$.

Odp.: Dla każdego elementu z wyjątkiem 0 i 1 istnieje bezpośredni następnik, natomiast bezpośredni poprzednik nie istnieje tylko dla liczby 0.

157. Udowodnić twierdzenie: Jeżeli $f : \langle X; R \rangle \xrightarrow[na]{1-1} \langle Y; S \rangle$ jest przekształceniem monotonicznym, to f^{-1} jest przekształceniem monotonicznym.

Wskazówka. Np. niech $\langle X, R \rangle = \langle \mathbf{N}, | \rangle$, $\langle Y, S \rangle = \langle \mathbf{N}, \leq \rangle$ oraz $f(x) = x$.

Rozważyć przypadek losetów.

158. Wykazać, że system $\langle \mathbf{Q}, \leq \rangle$ jest gęsty w systemie $\langle \mathbf{R}, \leq \rangle$.

159. Sprawdzić, czy

- $\langle \mathbf{N}, < \rangle = \langle \mathbf{N}, < \circ < \rangle$;
- $\langle \mathbf{N}, < \rangle = \langle \mathbf{N}, \leq \circ < \rangle$;
- $\langle \mathbf{N}, \leq \circ \geq \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N}^2 \rangle$.

160. Skonstruować przykład takiego systemu z częściowym porządkiem, który:

- ma dokładnie jeden element maksymalny i nie ma elementu największego;
- ma dokładnie jeden element minimalny i nie ma elementu najmniejszego;
- ma dokładnie dwa elementy minimalne i dwa maksymalne, z których dokładnie jeden jest jednocześnie elementem minimalnym i maksymalnym.
- wszystkie jego elementy są jednocześnie minimalne i maksymalne.
- nie ma elementu minimalnego i maksymalnego.

161. Znaleźć ogólną postać łańcucha oraz antyłańcucha w posecie $\langle \mathbf{N}, | \rangle$.

Odp. postać łańcuchów $\{k_1, k_1k_2, k_1k_2k_3, \dots\}$, postać antyłańcuchów każdy $A \subseteq \mathbf{N}$ taki, że

$$\forall_{x, y \in A} NWD(x, y) \notin A.$$

162. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby poset $\langle X, R \rangle$ był losetem, jest by każdy antyłańcuch był jednoelementowy.

163. Udowodnić, że każdy łańcuch posetu $\langle X, R \rangle$ jest losetem.

164. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Wykazać, że system $\langle 2^X, \subseteq \rangle$ jest posetem. Wskazać elementy wyróżnione.

Odp. Element najmniejszy \emptyset , największy X .

165. Sprawdzić, czy:

- a) jeżeli $\langle X, R \rangle$ jest posetem to $\langle X, R^{-1} \rangle$ jest posetem;
- b) jeżeli $\langle X, R \rangle$ jest losetem to $\langle X, R^{-1} \rangle$ jest losetem;
- c) jeżeli $\langle X, R \rangle$ jest gosetem to $\langle X, R^{-1} \rangle$ jest gosetem;

Odp. a) T. b) T. c) Nie, kontrprzykład $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$ jest gosetem, ale system $\langle \mathbf{N}, \geq \rangle$ nie jest gosetem.

166. Znaleźć związki między elementami wyróżnionych systemów dualnych.

167. Czy dla danego zbioru X co najmniej dwuelementowego można określić relację równoważności R tak, aby $\langle X, R \rangle$ był losetem ?

Nie. Dowód. Z założenia w zbiorze X są elementy x, y takie, że $x \neq y$. Ponieważ relacja R jest spójna, zatem xRy lub yRx . Załóżmy, że xRy . Na mocy symetrii (bo R jest relacją równoważności) mamy także yRx . Na mocy antysymetrii otrzymujemy $x = y$, co jest sprzeczne z założeniem.

168. Wykazać, że iloczyn kartezjański posetów jest posetem (z relacją produktową).

169. Niech $X = \{2^n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{3\}$.

- a) Czy w systemie $\langle X, | \rangle$ są elementy minimalne, maksymalne ?
- b) Czy w systemie $\langle X, | \rangle$ jest element najmniejszy ?
- c) Narysować diagram relacji.

Odp. a) Tak; maksymalne: liczba 3, minimalne: liczby 2 i 3. b) Nie.

170. Zbudować i) posety ii) losety na zbiorach:

- a) $\{2, 3, \dots, 10\}$;
- b) $\{0, 1\}^{16}$;
- c) $\bigcup_{n=1}^{20} \{a, b, c, \dots, z\}^n$;
- d) $[0, 1]^2$;

Wskazać elementy wyróżnione. Dla posetów wskazać łańcuchy.

171. Zbudować i) posety ii) losety na zbiorach:

- a) \mathbf{N}^2 ;
- b) $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \mathbf{N}^k$;
- c) \mathbf{C} ;
- d) $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$;
- e) \mathbf{R}^n ;

Wskazać elementy wyróżnione. Dla posetów wskazać łańcuchy.

Odp. a) Rozważany zbiór jest zbiorem par liczb naturalnych. Relację częściowego porządku wprowadzamy następująco: $\langle n, m \rangle R \langle k, l \rangle \Leftrightarrow n \leq k \wedge m \leq l$, relacją liniowego porządku jest np. relacja S zdefiniowana następująco:

$$(n, m)S(k, l) \Leftrightarrow (n < k \vee (n = k \wedge m \leq l))$$

b) Rozważany zbiór jest zbiorem wszystkich ciągów skończonych. Relację częściowego porządku R wprowadzamy jak następuje: $xRy \Leftrightarrow$ ciąg x jest odcinkiem początkowym ciągu y .

Relację liniowego porządku wprowadzamy następująco:

$$(m_1, \dots, m_k)R(n_1, \dots, n_k) \Leftrightarrow \exists 1 \leq i \leq \min\{k, l\}$$

takie, że $m_1 = n_1, \dots, m_{i-1} = n_{i-1}, m_i < n_i$ lub $k \leq l$ i $m_1 = n_1, \dots, m_k = n_k$.

d) Np. $xRy \Leftrightarrow \text{Re } x \leq \text{Re } y \wedge \text{Im } x \leq \text{Im } y$. Np.

$$xSy \Leftrightarrow (\text{Re } x < \text{Re } y \vee (\text{Re } x = \text{Re } y \wedge \text{Im } x \leq \text{Im } y)).$$

d) $xRy \Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbf{N}} x_n \leq y_n$; $xSy \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbf{N}} \forall_{n < k} (x_n = y_n \wedge x_k < y_k) \vee x = y$.

172. Udowodnić, że w gosecie każdy element (poza co najwyżej elementem największym) posiada następnik. Czy każdy element poza elementem pierwszym musi posiadać poprzednik?

173. Czy jeżeli w losiecie $\langle X, R \rangle$ każdy element posiada następnik to jest on gosetem?

Odp. Nie, np. w losiecie $\langle \mathbf{Z}, \leq \rangle$ każdy element ma następnik, ale nie jest on dobrze uporządkowany.

174. Wykazać, że dowolny poset $\langle X, R \rangle$ jest izomorficzny z pewną rodziną podzbiorów zbioru X uporządkowaną relacją inkluzji \subseteq .

Wskazówka. $h(x) = \{y : yRx\}$ dla $x \in X$ jest szukanym izomorfizmem.

175. Niech $\langle X, R_1 \rangle$ oraz $\langle X, R_2 \rangle$ będą losetami. Kiedy $\langle X; R_1 \circ R_2 \rangle$ jest losetem?

Odp. Wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 = R_2$. Jeżeli $R_1 \neq R_2$, to istnieje para (x, y) taka, że $(x, y) \in R_1$, $(x, y) \notin R_2$ lub $(x, y) \notin R_1$, $(x, y) \in R_2$. W pierwszym przypadku $(x, y) \in R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$, $(x, y) \in R_2 \subseteq R_1 \circ R_2$, $x \neq y$. Analogicznie dla drugiego przypadku. Jeżeli $R_1 = R_2$, to $R_1 \circ R_2 = R_1$.

176. Udowodnić, że

a) Poset $\langle \mathbf{W}, \leq \rangle$ jest gęsty;

b) Poset $\langle \mathbf{R}, \leq \rangle$ jest gęsty.

177. Z badać, czy gęstość jest niezmiennikiem podobieństwa.

Dowód. Przypuśćmy, że nie jest. Wówczas istnieją posety $\langle X, R \rangle$ i $\langle Y, S \rangle$ takie, że $\langle X, R \rangle \cong \langle Y, S \rangle$ oraz $\langle X, R \rangle$ jest gęsty, ale $\langle Y, S \rangle$ nie jest gęsty. Ponieważ posety są podobne więc istnieje izomorfizm ustalający podobieństwo tych posetów. Ponieważ poset $\langle Y, S \rangle$ nie jest gęsty, zatem zawiera elementy z, t takie, że t jest bezpośrednim następnikiem z . Niech $z = f(x)$ i $t = f(y)$ a ponieważ monotoniczny izomorfizm zachowuje elementy wyróżnione więc y jest bezpośrednim następnikiem x , a zatem poset $\langle X, R \rangle$ nie jest gęsty, co przeczy założeniu.

178. Udowodnić twierdzenie: Loset A ma typ porządkowy ω wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

a) zbiór A posiada element najmniejszy a_0 ;

b) dla dowolnego $a \in A$ istnieje kres dolny a' w zbiorze $\{x \in A : a \langle x\}$ (zwany bezpośrednim następnikiem).

- c) dla dowolnego podzbioru $B \subseteq A$ z tego, że $a_0 \in B$ i B zawiera razem z każdym elementem jego bezpośredni następnik, wynika, że $B = A$.

Dowód. (\Rightarrow) Warunki a), b), c) są niezmiennikami przekształceń podobnych. Ponieważ są one spełnione przez zbiór liczb naturalnych uporządkowanych przez relację \leq , więc są one konieczne na to, aby zbiór A miał typ ω .

(\Leftarrow) Załóżmy teraz, że zbiór A spełnia warunki a), b), c). Przyjmujemy, że

$$f(0) = a_0, \quad f(n+1) = (f(n))',$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$. Wówczas na mocy c) $D_2(f) = A$. Jeżeli $n, m \in \mathbf{N}$ i $n < m$, to na mocy warunku b) $f(n) < (f(n))' \leq f(m)$, dlatego f jest monotoniczną bijekcją z \mathbf{N} na A .

179. Udowodnić twierdzenie (o uniwersalności typu η).

Jeżeli system $\mathbf{X} = \langle X, R \rangle$ jest przeliczalnym losetem, to istnieje zbiór $A \subseteq \mathbf{Q}$ taki, że

$$\langle X, R \rangle \approx \langle A, \leq \rangle.$$

Dowód. Jeżeli zbiór X jest skończony to twierdzenie jest oczywiste. Niech więc zbiór X będzie nieskończony przeliczalny. Wówczas elementy tego zbioru możemy ustawić w ciąg, czyli $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Określamy indukcyjnie funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{Q}$ następująco:

$$f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = w_1,$$

gdzie w_1 jest dowolną liczbą wymierną, spełniającą warunki: $w_1 < 0$, jeśli $x_1 R x_0$ oraz $w_1 > 0$, jeśli $x_0 R x_1$. Rekurencyjnie

$$f(x_{n+1}) = w_{n+1},$$

gdzie liczba wymierna w_{n+1} jest tak dobrana, aby odcinek początkowy funkcji f był izomorfizmem systemów relacyjnych

$$\langle \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}, R \rangle \quad \text{i} \quad \langle \{0, w_1, \dots, w_{n+1}\}, \leq \rangle.$$

Taką liczbę można zawsze znaleźć dzięki gęstości zbioru \mathbf{Q} . Z definicji funkcji wynika, że jest ona izomorfizmem porządkowym zbiorów

$$\langle X, R \rangle \quad \text{i} \quad \langle f * X, \leq \rangle.$$

180. Udowodnić twierdzenie: Jeżeli loset A zawiera przeliczalny i gęsty w A podzbiór, to loset A jest podobny do pewnego podzbioru zbioru liczb rzeczywistych z naturalnym porządkiem.

Dowód. Rozpatrzmy przypadek kiedy A nie zawiera największego i najmniejszego elementu. Pozostałe przypadki rozpatrujemy analogicznie. Niech B będzie przeliczalnym i gęstym w A podzbiorem. Na mocy własności \mathbf{Q} istnieje izomorfizm h z B na \mathbf{Q} . Dla $a \in A$ istnieją $a_1, a_2 \in A$ takie, że $a_1 < a < a_2$. Istnieją również $b_0, b \in B$ takie, że $a_1 < b_0 < a < b < a_2$. W ten sposób konstruujemy ciąg b_0, b_1, b_2, \dots elementów ze zbioru B taki, że

$$a_1 < b_0 < b_1 < b_2 < \dots < a < b$$

Ponieważ ciąg $h(b_0), h(b_1), h(b_2), \dots$ jest monotoniczny i ograniczony liczbą $h(b)$, więc ma granicę będącą liczbą rzeczywistą g . Przyjmując $f(a) = g$ otrzymujemy izomorfizm z A w \mathbf{R} .

181. Wykazać, że $1 + \omega = \omega$.

Rozwiązanie. Ponieważ $1 = \overline{\{a\}}$, $\omega = \overline{\langle \mathbb{N}; \leq \rangle}$, więc dla $a \notin \mathbb{N}$ zbiór $\{a\} \cup \mathbb{N}$ z relacją R określoną jak w definicji sumy jest izomorficznie podobny do systemu $\langle \mathbb{N}; \leq \rangle$. Podobieństwo to ustala izomorfizm

$$f: \langle \{a\} \cup \mathbb{N}; R \rangle \rightarrow \langle \mathbb{N}; \leq \rangle$$

określony rekurencyjnie: $f(a) = 1$, $f(k) = k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

182. Wykazać, że $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$.

Rozwiązanie. Z definicji mnożenia typów losetowych

$$\omega \cdot 2 = \overline{\mathbb{N} \times \{1, 2\}}$$

Z kolei

$$\omega + \omega = \overline{\mathbb{N} \times \{1\} \cup \mathbb{N} \times \{2\}}$$

Wystarczy wykazać, że zbiory $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$ i $\mathbb{N} \times \{1\} \cup \mathbb{N} \times \{2\}$ są izomorficznie podobne.

183. Wykazać własność $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$

Dowód. Niech $\alpha = \overline{A}$, $\beta = \overline{B}$, $\gamma = \overline{C}$, $B \cap C = \emptyset$, wówczas

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \overline{A \times (B \cup C)} = \overline{A \times B \cup A \times C} = \overline{A \times B} + \overline{A \times C} = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

bo $(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$

184. Wykazać, że dla dowolnych losetów X i Y prawdziwa jest implikacja

$$\overline{X} = \overline{Y} \rightarrow \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$$

Czy implikacja przeciwna jest prawdziwa?

Odp. Niech $X = \langle \mathbb{N}; \leq \rangle$, $Y = \langle \mathbb{Z}; \leq \rangle$, wówczas $\overline{X} = \overline{Y}$ ale $\overline{\overline{X}} \neq \overline{\overline{Y}}$.

185. Czy

- wszystkie skończone losety tej samej mocy są podobne?
- nieskończone losety tej samej mocy są podobne?

Odp. a) Tak. Niech $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $a_1 < \dots < a_n$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $b_1 < \dots < b_n$. Izomorfizm między zbiorami A i B wyznacza funkcja określona wzorem: $f(a_i) = b_i$.

b) Nie, np. dla losetów $\langle \mathbb{N}; \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}; \leq \rangle$

186. Udowodnić, że losety są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje między nimi bijekcja będąca przekształceniem monotonicznym.

187. Wskazać odcinki początkowe losetu

- $\langle \mathbb{N}; \leq \rangle$;
- $\langle \mathbb{Q}; \leq \rangle$;
- $\langle \mathbb{Z}; \leq \rangle$.

Odp.: a) Są to skończone zbiory postaci $\{1, 2, \dots, n\}$ oraz zbiór pusty; b) są to zbiory postaci $(-\infty, x) \cap \mathbf{Q}$, $(-\infty, x] \cap \mathbf{Q}$ oraz zbiór pusty; c) są to zbiory postaci $\{\dots, n-2, n-1, n\}$ oraz zbiór pusty.

188. Wykazać, że zbiór wszystkich odcinków początkowych losetu A z relacją zawierania jest losetem podobnym do A .

189. Wykazać, że nieskończony loset jest typu ω wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie jego odcinki początkowe są skończone.

Dowód. Niech A będzie nieskończonym losetem i A_a skończony dla dowolnego $a \in A$. Przekształcenie f określone wzorem $f(a) = \overline{A_a}$ jest izomorfizmem A na \mathbf{N} .

190. Zbadać, czy losety $\langle \mathbf{N}; \leq \rangle$, $\langle \mathbf{Z}; \leq \rangle$, $\langle \mathbf{Q}; \leq \rangle$, $\langle \mathbf{R}; \leq \rangle$ są podobne.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\omega \neq \lambda$, $\eta \neq \lambda$, $\pi \neq \lambda$, bo zbiory \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} są przeliczalne, a zbiór \mathbf{R} ma moc continuum. Również $\omega \neq \eta$ i $\pi \neq \eta$, bo zbiór \mathbf{Q} jest losetem gęstym, natomiast zbiory \mathbf{N} i \mathbf{Z} nie są losetami gęstymi. Ponadto $\omega \neq \pi$, bo zbiory typu ω posiadają element najmniejszy, natomiast zbiory typu π nie posiadają elementu najmniejszego.

191. Wykazać, że każdy nieskończony podzbiór zbioru liczb naturalnych jest uporządkowany w typ ω przez naturalną relację \leq .

Dowód. Niech A będzie dowolnym nieskończonym podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Elementy zbioru A można ustawić w ciąg nieskończony według wielkości. Numeracja wyrazów tego ciągu jest żądanym izomorfizmem porządkowym.

192. Skonstruować na zbiorze \mathbf{N} porządek R tak aby system $\overline{\langle \mathbf{N}, R \rangle} = \pi$.

Konstrukcja. Relację R na zbiorze \mathbf{N} określamy w następujący sposób:

- jeśli liczby n i m są parzyste, to $n R m \stackrel{def}{\Leftrightarrow} n < m$,
- jeśli liczby n i m są nieparzyste, to $n R m \stackrel{def}{\Leftrightarrow} m < n$,
- każda liczba nieparzysta jest wcześniejsza od każdej liczby parzystej.

Relacja ta porządkuje liniowo zbiór \mathbf{N} . Izomorfizmem jest funkcja $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$, określona wzorem:

$$f(n) = \begin{cases} 2n-1 & \text{dla } n \geq 1 \\ -2n & \text{dla } n \leq 0 \end{cases}$$

193. Udowodnić, że jeżeli zbiory X i Y są losetami podobnymi, to:

- a) zbiór X ma element największy (najmniejszy) wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór Y ma element największy (najmniejszy);
- b) każdy element zbioru X ma bezpośredni następnik (poprzednik) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru Y ma bezpośredni następnik (poprzednik);
- c) porządek zbioru X jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór Y jest uporządkowany gęsto;
- d) zbiór X jest gusetem wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór Y jest gusetem.

194. Udowodnić, że loset $\langle \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}; \leq \rangle$ ma typ ω^* .

Odp. $f(x) = -(x+1)$

195. Wykazać własności

- a) $2+3=5$;
- b) $2 \cdot 2=4$;
- c) $1+\omega=\omega$;
- d) $\omega+1 \neq \omega$;
- e) $\omega^* \neq \omega$;
- f) $\pi = \omega^* + \omega$;
- g) $\pi \neq \omega + \omega^*$;
- h) $\pi = \pi^*$;
- i) $\eta = \eta^*$;
- j) $\lambda = \lambda^*$;
- k) $\omega + \omega \neq \omega$;
- l) $\eta + \eta = \eta$;
- m) $\lambda + \lambda \neq \lambda$;
- n) $\lambda + 1 + \lambda = \lambda$;
- o) $\eta \cdot \eta = \eta$;
- p) $\omega \cdot \eta \neq \omega \cdot (\eta + 1)$;

Odp.: c) Równość jest prawdziwa, bo zbiory \mathbf{N} i $\mathbf{N} \cup \{0\}$ są uporządkowane podobnie;

d) $\omega+1$ jest typem porządkowym zbioru wszystkich liczb kardynalnych przeliczalnych, czyli zbioru $\mathbf{N} \cup \aleph_0$ z relacją porządku liczb kardynalnych. Porządek ten ma ostatni element, a porządek typu ω nie ma go.

f) $\omega^* + \omega$ jest typem uporządkowanego zbioru liczb całkowitych;

g) $\omega + \omega^*$ jest typem zbioru postaci $\frac{1}{n}$ lub $-\frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \dots$, z naturalnym uporządkowaniem, a zbiór ten nie jest izomorficznie podobny do zbioru liczb całkowitych z naturalnym porządkiem.

i) $\langle \mathbf{Q}; \leq \rangle \approx \langle \mathbf{Q}; \geq \rangle$

m) Niech $\overline{A} + \overline{B} = \lambda$, wówczas $A \approx A_1 \subseteq \mathbf{R}$, $B \approx B_1 \subseteq \mathbf{R}$, $A_1 \cup B_1 = \mathbf{R}$, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ i $a < b$ dla $a \in A, b \in B$. Dlatego istnieje w A_1 kres górny a_1 lub w B_1 kres dolny b_1 , stąd $\overline{A_1} = \lambda + 1 \neq \lambda$ lub $\overline{B_1} = 1 + \lambda \neq \lambda$;

n) Niech $A = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$, $B = \{0\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$, wówczas $\overline{A} = \overline{C} = \lambda$ i $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = \lambda$;

196. Wykazać, że dla dowolnych typów losetowych

- $(\alpha^*)^* = \alpha$;
- $(\alpha + \beta)^* = \beta^* + \alpha^*$;
- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
- $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$;
- $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$;
- $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$;
- $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$;
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$;
- $(\alpha \cdot \beta)^* = \beta^* \cdot \alpha^*$.

197. Wykazać, że

- dla dowolnych typów losetowych α, β istnieją i są określone jednoznacznie typy $\alpha + \beta$ i $\alpha \cdot \beta$;
- dla dowolnego losetu T i dowolnego ciągu typów $(\alpha_i)_{i \in T}$ istnieje i jest określony jednoznacznie typ losetowy $\sum_{i \in T} \alpha_i$;

Wskazówka. Sprawdzić, że jeżeli A i B rozłączne losety, to relacja \leq określona w definicji sumy typów losetowych liniowo porządkuje zbiór

$$A \cup B \text{ i } \overline{A_1} = \overline{A}, \overline{B_1} = \overline{B}, A_1 \cap B_1 = \emptyset \Rightarrow \overline{A_1 + B_1} = \overline{A + B}$$

198. Podać przykład typów losetowych α, β i γ takich, że

- $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$;
- $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$;
- $(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$.

Odp. a) Np. $1 + \omega \neq \omega + 1$; b) $\alpha = 2, \beta = \omega$; c) $\alpha = \omega^*, \beta = \omega, \gamma = 2$.

199. Skonstruować przykłady losetów typu:

- $\omega \cdot \omega$;
- $\omega \cdot \omega \cdot \omega$;
- $\omega \cdot \omega \cdot \omega \cdot \omega$.

200. Zbadać, czy:

- każdy filoset jest gosetem;
- typ ω jest typem gosetowym;
- typ ω^* jest typem gosetowym;
- typ $\omega + \omega$ jest typem gosetowym;

Odp.: a) T; jeśli $\langle X; \leq \rangle$ jest losetem skończonym i niepustym, to ma element pierwszy; b) T; c) N; d) T, wystarczy obrać zbiory PN i NN z naturalnymi porządkami oraz sprawdzić, że zbiór N z relacją $2 < 4 < 6 < \dots < 1 < 3 < 5 < \dots$, jest gosetem.

201. Zbadać, czy podane systemy są typu gosetowego:

- $\langle \mathbf{Z}; \leq \rangle$;
- $\langle \mathbf{Q}; \leq \rangle$;
- $\langle \mathbf{R}; \leq \rangle$;
- $\langle \{x : x = 1 - 1/n, n \in \mathbf{N}\}; \leq \rangle$

Odp.: a) N; b) N; c) N; d) T.

202. Wykazać, że

- a) każdy niepusty goset ma element najmniejszy;
- b) każdy podzbiór gosetu jest gosetem.

203. Wykazać, że jeżeli zbiory A i B są równoliczne i A jest gosetem, to można zbiór B tak uporządkować, aby był gosetem podobnym do zbioru A .

203. Wykazać, że dla dowolnego gosetu A nie istnieje monotoniczna bijekcja $f : A \rightarrow A$ taka, że dla pewnego elementu $a \in A$ zachodzi $f(a) < a$.

Odp.: W przeciwnym przypadku otrzymujemy $f(f(a)) < f(a)$, $f(f(f(a))) < f(f(a))$, itd.

204. Wykazać, że dowolny goset nie może być podobny do żadnego ze swoich odcinków początkowych.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją $a \in A$ i bijekcja $f : A \rightarrow A_a$ (przyp. $A_a = \{x \in A : x < a\}$) przekształcająca A na A_a będąca izomorfizmem porządkowym tych dwóch zbiorów, uporządkowanych przez relację \leq . Ponieważ $f(a) \in A_a$, więc $f(a) < a$ z definicji odcinka początkowego. Ponieważ f zachowuje porządek, więc wynika stąd, że $f(f(a)) < f(a)$. Określamy indukcyjnie ciąg elementów zbioru A : $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Stąd $a_{n+1} < a_n$ dla każdego n . Zatem zbiór $\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ jako niepusty podzbiór zbioru A nie ma elementu najmniejszego, co doprowadziło do sprzeczności.

205. Wykazać, że dwa różne odcinki gosetu nie mogą być podobne.

Wskazówka. Patrz zadanie 23.

206. Wykazać, że

- a) dla żadnej liczby porządkowej α nie zachodzi $\alpha < \alpha$;
- b) jeżeli $\alpha \leq \beta$ i $\beta \leq \alpha$ są różnymi liczbami porządkowymi, to $\alpha < \beta$ albo $\beta < \alpha$.

207. Wykazać, że między dwoma gosetami nie istnieją dwa różne izomorfizmy.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją dwa różne izomorfizmy f_1 i f_2 z A na B . Ponieważ są one różne, więc dla pewnego $a \in A$ mamy $f_1(a) < f_2(a) = b$. Złożenie $f_2^{-1} \circ f_1$ jest izomorfizmem B w B i $(f_2^{-1} \circ f_1)(b) < b$, co jest sprzecznością.

208. Wykazać, że z dwóch gosetów jeden jest podobny do drugiego albo do jego odcinka początkowego.

Dowód. Niech A i B będą gosetami. Niech $S = \{a \in A : A_a \approx B_b \text{ dla pewnego } b \in B\}$. Wówczas $S = A$ albo $S = A_{a_0}$ dla pewnego $a_0 \in A$, $S \approx B$ albo $S \approx B_{b_0}$ dla pewnego $b_0 \in B$. Jeżeli $S = A$, $S \approx B$ lub $S = A$, $S \approx B_b$ lub $S = A_a$, $S \approx B$, to własność jest wykazana. Przypadek $S = A_{a_0}$, $S = B_{b_0}$ nie zachodzi, ponieważ $A_{a_0} \approx B_{b_0}$ i $a_0 \in S = A_{a_0}$.

209. (Zasada indukcji porządkowej). Niech A będzie dowolnym gosetem oraz $B \subseteq A$ i dla dowolnego elementu $x \in A$ zbiór B spełnia warunek: jeżeli $A_x \subseteq B$, to $x \in B$. Wykazać, że wówczas $B = A$.

Dowód. Przypuśćmy, że $B \neq A_x$. Wówczas różnica $A \setminus B \neq \emptyset$ i ma element najmniejszy x . Stąd otrzymujemy $A_x \subseteq B$ i $x \notin B$, co przeczy założeniu.

210. Wykazać, że dla dowolnej liczby porządkowej α zbiór $W_\alpha = \{\beta : \beta \leq \alpha\}$ wszystkich liczb porządkowych spełniających podany warunek jest gosetem typu α , tj. $\overline{W_\alpha} = \alpha$.

Dowód. Niech $\langle A; \leq \rangle$ będzie dowolnym gosem typu α . Dla $a \in A$ zbiór $A_a = \{x \in A : x \leq a\}$ z relacją \leq jest gosem. Oznaczmy przez $f(a)$ typ porządkowy tego zbioru. Jest to liczba porządkowa mniejsza niż α , bo A_a jest odcinkiem początkowym zbioru A w relacji \leq . Określiliśmy więc funkcję $f : A \rightarrow W_\alpha$. Funkcja f jest surjekcją bo dla dowolnej liczby porządkowej $\beta < \alpha$ zbiór $\langle A; \leq \rangle$ posiada odcinek początkowy typu β , co wynika z definicji nierówności dla liczb porządkowych. Jeżeli $a \leq b$, to A_a jest odcinkiem początkowym zbioru A_b , a więc $f(a) < f(b)$ i na odwrót. Funkcja f jest zatem izomorfizmem porządkowym.

211. Wykazać, że każdy zbiór liczb porządkowych jest gosem.

Dowód. Niech M będzie dowolnym zbiorem liczb porządkowych i niech K będzie niepustym podzbiorem zbioru M , tj. $\emptyset \neq K \subseteq M$. Należy pokazać, że zbiór K ma element najmniejszy. Niech $\alpha \in K$, wówczas albo α jest najmniejszym elementem zbioru K , albo istnieje w zbiorze K liczba porządkowa mniejsza niż α , a zatem iloczyn $K \cap W_\alpha$ (przyp. $W_\alpha = \{\beta : \beta \leq \alpha\}$) jest gosem, czyli ma element najmniejszy, który jest jednocześnie najmniejszym elementem zbioru K .

212. Wykazać, że dla dowolnego zbioru liczb porządkowych M :

- istnieje liczba porządkowa większa od wszystkich liczb ze zbioru M ;
- wśród liczb porządkowych nie należących do zbioru M istnieje liczba najmniejsza.

Dowód. a) Niech $A = \bigcup_{\alpha \in M} W_\alpha$. Zbiór A jest gosem na mocy zad. 29. Stąd $\beta = \overline{A}$ jest szukaną liczbą porządkową.

b) Na mocy a) istnieje liczba $\beta \notin M$. Zbiór $W_\beta \setminus M$ jest gosem i zawiera najmniejszy element γ , który jest poszukiwany.

213. Wykazać, że nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych.

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że Z jest zbiorem wszystkich liczb porządkowych, jest on więc gosem z relacją \leq . Niech α będzie jego typem porządkowym. Wtedy $\alpha \in Z$, a zbiór Z_α jest odcinkiem początkowym zbioru Z . Czyli α jest typem porządkowym tego odcinka, a stąd $\alpha < \alpha$, co jest niemożliwe.

214. Wykazać, że $\alpha + 1$ jest liczbą porządkową następującą bezpośrednio po liczbie α .

Dowód. Wiemy, że $\alpha + 1 > \alpha$. Niech $\alpha < \beta$, wówczas $W_\alpha \subset W_\beta$, $W_\alpha \cup \{\alpha\}$ jest odcinkiem początkowym W_β lub $W_\alpha \cup \{\alpha\} = W_\beta$, $\overline{W_\alpha \cup \{\alpha\}} = \alpha + 1 \leq \overline{W_\beta} = \beta$.

215. Wykazać, że suma dwóch liczb porządkowych jest liczbą porządkową.

Dowód. Niech α, β będą liczbami porządkowymi systemów $\langle X; \leq_1 \rangle, \langle Y; \leq_2 \rangle$, tj. $\alpha = \overline{\langle X; \leq_1 \rangle}$ i $\beta = \overline{\langle Y; \leq_2 \rangle}$. Należy sprawdzić, że typ porządkowy $\alpha + \beta = \overline{\langle X \cup Y; R \rangle}$ (gdzie relacja R jest określona w definicji sumy typów porządkowych) jest liczbą porządkową. W tym celu wystarczy wykazać, że każdy niepusty podzbiór zbioru $X \cup Y$ ma element najmniejszy. Niech więc $\emptyset \neq A \subseteq X \cup Y$, wówczas albo $A \cap X \neq \emptyset$ i wtedy najmniejszym elementem zbioru A jest najmniejszy w X element zbioru $A \cap X$, albo $A \subseteq Y$ i wtedy ...