

I. KLASYCZNY RACHUNEK ZDAŃ (KRZ)

1. Czym jest logika matematyczna i co jest jej obiektem badań ?
2. Podstawowe założenie logiki klasycznej i skutki jego odrzucenia. Podstawowe systemy logiki.
3. Definicje alfabetu oraz napisu języka KRZ.
4. Definicja formuły KRZ oraz przykład napisu, który nie jest formułą.
5. Spójniki ekstensjonalne i intensjonalne. Podać przykłady takich spójników oraz rachunków logicznych, w których są one stosowane.
6. Definicja wartościowania logicznego.
7. Definicja funktora zdaniotwórczego n -argumentowego. Ile jest funktorów n -argumentowych ?
8. Funktory jednoargumentowe i tabela wartościowania formuł z tymi funktorami.
9. Definicja funktora redukowalnego.
10. Definicje dowolnych sześciu nieredukowalnych funktorów dwuargumentowych.
11. Twierdzenie o funktorach wystarczających do zdefiniowania dowolnego funktora n -argumentowego wraz z dowodem.
12. Zasady prawdziwości zdań z funktorami dwuargumentowymi.
13. Przykład definicji ze wskazaniem jej definiensa i definiendum.
14. Określić pewien nieredukowalny funktor trójargumentowy i zdefiniować go za pomocą negacji i implikacji.
15. Definicja i przykład tautologii. Co to jest antytautologia ?
16. Definicja formuł równoważnych. Definicja formuły silniejszej i słabszej.
17. Twierdzenie o odrywaniu formuł z dowodem – reguła *modus ponens*.
18. Twierdzenie o podstawianiu formuł z dowodem i jego zastosowanie.
19. Metody badania tautologiczności formuł.
20. Metoda skrócona badania tautologiczności formuły.
21. Metoda konsekwencji syntaktycznej badania tautologiczności formuły.
22. Definicja dedukcji i syntaktycznej konsekwencji.
23. Układ aksjomatów KRZ. Co to znaczy, że układ aksjomatów KRZ jest niezależny, niesprzeczny, pełny i rozstrzygalny ?
24. Definicja twierdzenia KRZ. Przykład twierdzenia z dowodem.
25. Sposoby dowodzenia twierdzeń w matematyce.
26. Istota dowodu *reductio ad absurdum*.
27. Prawo Fregego z dowodem.
28. Prawo komutacji z dowodem.
29. Prawo dylematu konstrukcyjnego z dowodem.
30. Prawo dylematu destrukcyjnego z dowodem.
31. Prawo eksportacji z dowodem.
32. Definicje postaci normalnych formuł KRZ i twierdzenie o nich.
33. Definicja i przykład formuły w notacji polskiej.
34. Definicja i przykład formuły w odwrotnej notacji polskiej.
35. Prawo dylematu konstrukcyjnego w notacji prefiksowej i postfiksowej.
36. Prawo dylematu destrukcyjnego w notacji prefiksowej i postfiksowej.
37. Definicja długości formuły.
38. Definicja reguły wnioskowania logicznego.
39. Twierdzenie o związku między tautologiami a regułami wnioskowania logicznego z dowodem.
40. Co to znaczy, że definicja jest konstruktywna ? Podać przykład takiej definicji.
41. Podać i udowodnić jedną z reguł sylogizmu warunkowego.
42. Podać i udowodnić jedną z reguł apagogenicznych.
43. Zbadać, czy podany schemat
$$\frac{p \vee q, p \rightarrow (r \wedge \neg r)}{q}$$
 jest regułą wnioskowania logicznego.

II. KLASYCZNY WĘZSZY RACHUNEK PREDYKATÓW (KWRP)

44. Definicja funkcji zdaniowej. Przykład funkcji zdaniowej.
45. Definicja układu spełniającego funkcję zdaniową. Definicja wykresu funkcji zdaniowej.
46. Definicja i przykład zmiennej predykatywnej.
47. Definicje alfabetu i napisu języka KWRP.
48. Definicja i przykład formuły języka KWRP.
49. Definicja tautologii rachunku kwantyfikatorów.
50. Twierdzenie o podstawianiu w rachunku kwantyfikatorów.
51. Warunki konieczne i wystarczające wartościowania formuł z kwantyfikatorami.
52. Prawo *dictum de omni* z dowodem.
53. Czy każda funkcja zdaniowa jest zdaniem logicznym ? Odpowiedź uzasadnij.
54. Prawa de Morgana rachunku kwantyfikatorów z jednym dowodem.
55. Podać i udowodnić jedno z praw włączania i wyłączenia kwantyfikatorów.
56. Czy kwantyfikator ogólny jest rozdzielnym względem alternatywy ? Odpowiedź udowodnić.
57. Czy kwantyfikator egzystencjalny jest rozdzielnym względem koniunkcji ? Odpowiedź udowodnić.
58. Prawa przestawiania kwantyfikatorów.
59. Definicje postaci normalnych formuł KWRP.
60. Definicja reguły dowodzenia KWRP.
61. Reguła rozkładania kwantyfikatora ogólnego względem implikacji.
62. Reguła rozkładania kwantyfikatora szczegółowego względem koniunkcji.
63. Reguła przestawiania kwantyfikatorów.
64. Reguła eliminacji kwantyfikatora ogólnego.
65. Zapisać jako formuły KWRP: a) definicję granicy ciągu; b) zdanie „*żadna liczba naturalna nie jest mniejsza od zera*”.
66. Zapisać jako formułę KWRP definicję liczby pierwszej.
67. Zapisać jako formułę KWRP twierdzenie Czebyszewa: „*Pomiędzy liczbami naturalnymi n i $2n$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza*”.

III. FORMALNE PODSTAWY TEORII MNOGOŚCI (TM)

68. Podstawowe obiekty badań teorii mnogości. Przykłady jej sformalizowanych systemów.
69. Zasługi Georga Cantora i Johna von Neumanna w rozwoju podstaw teorii mnogości.
70. Definicja klasy formuł teoriomnogościowych.
71. Definicje zmiennej wolnej, zmiennej związanej i zdania w TM.
72. Aksjomatyka Zermelo-Fraenkla (ZF) TM.
73. Aksjomat równości zbiorów i jego zastosowanie.
74. Ile istnieje różnych zbiorów pustych? Odpowiedź uzasadnić.
75. Aksjomat sumy zbiorów oraz wniosek z tego aksjomatu.
76. Aksjomat zbioru potęgowego oraz wniosek z tego aksjomatu.
77. Aksjomat nieskończoności.
78. Aksjomat wyboru i jego zastosowanie.
79. Aksjomat zastępowania dla formuły Φ i jego sens.
80. Które aksjomaty są warunkowymi aksjomatami istnienia i dlaczego?
81. Które aksjomaty są absolutnymi pewnikami istnienia i dlaczego?
82. Twierdzenie o istnieniu pary nieuporządkowanej z dowodem.
83. Twierdzenie o istnieniu sumy zbiorów z dowodem.
84. Twierdzenie o istnieniu iloczynu zbiorów.
85. Twierdzenie o istnieniu różnicy zbiorów.
86. Twierdzenie o istnieniu różnicy symetrycznej zbiorów.
87. Antynomia Russella z dowodem.
88. Prawa de Morgana rachunku zbiorów i ich uogólnienia z jednym dowodem.
89. Podać i udowodnić podstawowe własności inkluzji właściwej.
90. Zbadać, czy dla dowolnych zbiorów X, Y, Z prawdziwa jest formuła $((X \in Y) \wedge (Y \in Z)) \rightarrow (X \in Z)$.
91. Zbadać, czy dla dowolnych zbiorów X, Y, Z prawdziwa jest formuła $((X \subseteq Y) \wedge (Y \in Z)) \rightarrow (X \in Z)$.
92. Zbadać, czy dla dowolnych zbiorów X, Y, Z prawdziwa jest formuła $(X \in Y \wedge Y \subseteq Z) \rightarrow \neg(Z \subseteq X)$.
93. Zbadać, czy dla dowolnych zbiorów X, Y, Z prawdziwa jest formuła $(X \subseteq Y \cup Z) \leftrightarrow (X \cap Y' \subseteq Z)$.
94. Zbadać, czy dla dowolnych zbiorów X, Y formuła $X \subseteq Y \leftrightarrow 2^X \subseteq 2^Y$ jest twierdzeniem.
95. Zbadać prawdziwość formuły $\bigcup_{i=1}^n A_i \div \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n (A_i \div B_i)$.
96. Zbadać prawdziwość formuły $\bigcup_{k \in K} \bigcap_{t \in T} A_{k,t} = \bigcap_{t \in T} \bigcup_{k \in K} A_{k,t}$.
97. Zbadać prawdziwość formuły $\bigcap_{t \in T} (A_t \cup B_t) = \bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{t \in T} B_t$.
98. Zbadać prawdziwość formuły $\bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{t \in T} B_t = \bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t)$.
99. Zbadać prawdziwość formuły $\bigcup_{k \in K} \bigcap_{t \in T} A_{k,t} = \bigcap_{t \in T} \bigcup_{k \in K} A_{k,t}$.
100. Zbadać prawdziwość formuły $\bigcup_{t \in T} (A_t \setminus B_t) = \bigcup_{t \in T} A_t \setminus \bigcup_{t \in T} B_t$.
101. Definicja i przykład ciała zbiorów.
102. Twierdzenie o zamkniętości ciała zbiorów względem operacji teoriomnogościowych z dowodem.
103. Definicja składowej uniwersum i własności składowych.
104. Twierdzenie o najmniejszym ciełe zbiorów. Definicja ciała generowanego przez zbiory. Definicja zbiorów niezależnych.
105. Określić uniwersum U i wyróżnić w nim cztery zbiory niezależne.

IV. ILOCZYNY KARTEZJAŃSKIE I RELACJE

106. Definicja i autor pary uporządkowanej (1921). Twierdzenie o równości par uporządkowanych z dowodem.
107. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności iloczynu kartezjańskiego z dowodem.
108. Definicje uogólnionych iloczynów kartezjańskich.
109. Przyjąć założenia i zbadać prawdziwość formuły $\bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i)$.
110. Przyjąć założenia i zbadać prawdziwość formuły $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.
 Sformułować jej uogólnienie.
111. Przyjąć założenia i zbadać prawdziwość formuły $\bigcup_{k \in K} A_k \times \bigcup_{t \in T} B_t = \bigcup_{(k,t) \in K \times T} (A_k \times B_t)$.
112. Przyjąć założenia i zbadać prawdziwość formuły $\bigcap_{k \in K} A_k \times \bigcap_{t \in T} B_t = \bigcap_{(k,t) \in K \times T} (A_k \times B_t)$.
113. Definicja relacji n -argumentowej i jej szczególne przypadki.
114. Definicje projekcji relacji wieloargumentowej oraz i -tej dziedziny relacji.
115. Czy różnica i -tych dziedzin relacji n -argumentowej jest równa i -tej dziedzinie ich różnicy? Odpowiedź udowodnić.
116. Definicja n -argumentowej relacji odwrotnej. Przykład odwracania relacji.
117. Definicja złożenia relacji dwuargumentowych i jej uogólnienie na relacje wieloargumentowe.
118. Czy złożenie relacji dwuargumentowych jest łączne? Odpowiedź udowodnić.
119. Definicje obrazów n -argumentowej relacji i ich szczególnych przypadków dla relacji dwuargumentowych.
120. Wykazać, że dla dowolnych relacji $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ zachodzi równość zbiorów

$$D_2(S \circ R) = S * (D_2(R) \cap D_1(S))$$
121. Określić zakresy zmienności relacji i zbadać, czy $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.
122. Określić zakresy zmienności relacji i zbadać, czy $Q \circ \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) = \bigcup_{i \in I} (Q \circ R_i)$.
123. Określić zakresy zmienności relacji i zbadać, czy $Q \circ \left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) = \bigcap_{i \in I} (Q \circ R_i)$.
124. Zbadać prawdziwość formuły $R_1 \subseteq R_2 \leftrightarrow R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$.
125. Określić zakresy zmienności relacji i zbadać, czy $\left(\bigcup_{i \in I} R_i \right)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$.

V. SPECJALNE WŁASNOŚCI RELACJI DWUARGUMENTOWYCH

126. Podać definicje specjalnych własności relacji dwuargumentowych.
127. Twierdzenie o symetryczności relacji z dowodem.
128. Twierdzenie o złożeniu relacji symetrycznych z dowodem.
129. Geometryczne własności relacji $S \subseteq \mathbf{R}^2$.
130. Podać i udowodnić trzy własności relacji podzielności w zbiorze liczb naturalnych \mathbf{N} .
131. Zbadać, czy indeksowana suma relacji symetrycznych jest relacją symetryczną.
132. Zbadać, czy indeksowany iloczyn relacji symetrycznych jest relacją symetryczną.
133. Zbadać, czy indeksowana suma relacji antysymetrycznych jest relacją antysymetryczną.
134. Zbadać, czy indeksowany iloczyn relacji antysymetrycznych jest relacją antysymetryczną.
135. Definicja i przykład relacji równoważności.
136. Zbadać, czy złożenie relacji równoważności jest relacją równoważności.
137. Definicja podziału zbioru i twierdzenie o związku między podziałem a relacją równoważności.
138. Zasada abstrakcji z dowodem.
139. Definicja klas abstrakcji. Definicja zbioru reprezentantów.
140. Podstawowe własności klas abstrakcji. Udowodnić jedną z nich.
141. Definicja relacji produktowej. Zbadać, czy relacja produktowa relacji równoważności jest relacją równoważności.

VI. KONSTRUKCJE ZBIORÓW LICZBOWYCH

142. Definicja następnika zbioru X i jego związku ze zbiorem X .
143. Definicja induktywnej rodziny zbiorów. Które aksjomaty zapewniają istnienie tej rodziny?
144. Lemat i twierdzenie o iloczynie mnogościowym zbiorów induktywnych. Definicja zbioru liczb naturalnych.
145. Zasada indukcji zupełnej.
146. Udowodnić, że $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.
147. Udowodnić, że $2 \mid (n^2 + n)$.
148. Podać i udowodnić jedną z podstawowych własności liczb naturalnych.
149. Definicje relacji niewiększości i relacji mniejszości. Definicje dodawania i mnożenia w zbiorze liczb naturalnych.
150. Dwa przykłady definicji rekurencyjnych.
151. Udowodnić twierdzenie „Liczba obszarów, na które n okręgów może podzielić płaszczyznę, jest równa co najwyżej $n(n-1) + 2$ ”.
152. Zasada minimum dla liczb naturalnych z dowodem.
153. Definicja dzielnika naturalnego. Definicje liczb pierwszych i liczb złożonych.
154. Definicja liczb bliźniaczych.
155. Definicje liczb algebraicznych i liczb przestępnych.
156. Wielkie twierdzenie Fermata z historią jego dowodzenia.
157. Teoriomnościowa konstrukcja liczb całkowitych.
158. Konstrukcja pierścienia.
159. Teoriomnościowa konstrukcja liczb wymiernych.
160. Konstrukcja liczb rzeczywistych w ujęciu Cantora.

VII. FUNKCJE

161. Historia rozwoju pojęcia funkcji.
 162. Definicje relacji jednoznacznej względem k -tej zmiennej oraz funkcji $n - 1$ zmiennych i funkcji jednej zmiennej.
 163. Definicje szczególnych typów funkcji (iniekcji, surjekcji, bijekcji, ciągu, macierzy i permutacji).
 164. Zbadać prawdziwość formuły $Y^X = 2^{X \times Y}$.
 165. Wykazać, że relacja odwrotna do bijekcji jest bijekcją.
 166. Sformułować i udowodnić twierdzenie o złożeniu dwóch funkcji.
 167. Sformułować i udowodnić twierdzenie o złożeniu dwóch bijekcji.
 168. Zbadać, czy przekształcenie $J : \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$ określone wzorem $J(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1$ jest iniekcją.
 169. Zbadać, czy przekształcenie $J_{1 \times 2}$ zbioru \mathbf{N}_0 w zbiór $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ określone wzorem:

$$J_{1 \times 2}(x) = \left(x - \frac{y(y-1)}{2}, \frac{y(y+1)}{2} - x - 1 \right)$$

gdzie $y \in \mathbf{N}_0$ spełnia warunek $\frac{y(y-1)}{2} \leq x < \frac{y(y+1)}{2}$ jest bijekcją. Wyznaczyć obraz elementu 1000.

170. Określić bijekcję $J : \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$ i funkcję do niej odwrotną.
 171. Określić bijekcję $J : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ i funkcję do niej odwrotną.
 172. Skonstruować bijekcję $J : \mathbf{N}_0^3 \rightarrow \mathbf{N}_0^2$ i wykazać poprawność konstrukcji.
 173. Definicje obrazu i przeciwobrazu funkcji.
 174. Zbadać prawdziwość formuły $f * \bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} (f * A_t)$, gdzie $f \in Y^X$, $A_t \subseteq X$, $t \in T$.
 175. Zbadać prawdziwość formuły $f * (A_1 \cap A_2) = f * (A_1) \cap f * (A_2)$, gdzie $f \in Y^X$, $A_1 \subseteq X$, $A_2 \subseteq X$.
 176. Zbadać prawdziwość formuły $(f * A_1) \setminus (f * A_2) = f * (A_1 \setminus A_2)$, gdzie $f \in Y^X$, $A_1 \subseteq X$, $A_2 \subseteq X$.
 177. Zbadać prawdziwość formuły $f^{-1} * \bigcup_{t \in T} B_t = \bigcup_{t \in T} (f^{-1} * B_t)$, gdzie $f \in Y^X$, $B_t \subseteq Y$, $t \in T$.
 178. Zbadać prawdziwość formuły $f^{-1} * \bigcap_{t \in T} B_t = \bigcap_{t \in T} (f^{-1} * B_t)$, gdzie $f \in Y^X$, $B_t \subseteq Y$, $t \in T$.
 179. Zbadać prawdziwość formuły $f^{-1} * (B_1 \setminus B_2) = (f^{-1} * B_1) \setminus (f^{-1} * B_2)$, gdzie $f \in Y^X$, $B_1 \subseteq Y$, $B_2 \subseteq Y$.
 180. Określić bijekcję między zbiorami

$$A = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}, B = \{x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1\}$$

 181. Określić bijekcję między zbiorami

$$A = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1\}, B = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x < 1\}$$

 182. Określić bijekcję między kołem o promieniu 1 a kwadratem opisanym na tym kole.

VIII. MOCE ZBIORÓW I LICZBY KARDYNALNE

183. Definicja B. Bolzano zbiorów równolicznych z 1851r. Podstawowe własności relacji równoliczności. Dowód przechodniość równoliczności.
184. Wykazać prawdziwość formuły
$$(X \cong Y \wedge W \cong Z \wedge X \cap W = \emptyset \wedge Y \cap Z = \emptyset) \rightarrow (X \cup W \cong Y \cup Z)$$
185. Wykazać prawdziwość formuły $(X \cong Y) \rightarrow (2^X \cong 2^Y)$.
186. Wykazać prawdziwość formuły $(Y \times Z)^X \cong (Y^X \times Z^X)$.
187. Pierwsze twierdzenie Cantora-Bernsteina z dowodem.
188. Wykazać równoliczność zbiorów
$$A = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}, B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$$
189. Wykazać równoliczność zbiorów
$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 2\pi\}$$
190. Aksjomat mocy zbiorów. Definicja liczby kardynalnej.
191. Czy dla dowolnych zbiorów A i B istnieją zbiory rozłączne C i D takie, że $A \cong C$, $B \cong D$. Odpowiedź udowodnić.
192. Aksjomat mocy zbiorów. Definicja liczby kardynalnej.
193. Definicja liczby kardynalnej skończonej. Cztery własności liczb kardynalnych skończonych. Udowodnić jedną z nich.
194. Definicje zbioru nieskończonego i zbioru przeliczalnego. Warunek konieczny i wystarczający przeliczalności zbioru.
195. Cztery własności zbiorów przeliczalnych. Udowodnić jedną z nich.
196. Definicja liczby kardynalnej \aleph_0 .
197. Definicja i przykład zbioru nieprzeliczalnego.
198. Lemat o mocy przedziału rzeczywistego $[0, 1]$ z dowodem.
199. Podać 3 podstawowe własności zbiorów nieprzeliczalnych i uzasadnić jedną z nich.
200. Wyznaczyć moc przedziału rzeczywistego $[a, b)$.
201. Podać i udowodnić lemat przekątniowy Cantora.
202. Czy istnieje największa liczba kardynalna? Odpowiedź uzasadnić.
203. Konstrukcja liczb kardynalnych nieskończonych.
204. Definicja liczby kardynalnej continuum \mathfrak{c} . Trzy przykłady zbiorów mocy continuum.
205. Jaka jest moc zbioru $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$? Odpowiedź udowodnić.
206. Jaka jest moc zbioru liczb rzeczywistych? Odpowiedź udowodnić.
207. Jaka jest moc zbioru liczb wymiernych? Odpowiedź udowodnić.
208. Drugie twierdzenie Cantora-Bernsteina. Dowód przechodniości.
209. Twierdzenie o spójności relacji $<$ w zbiorze liczb kardynalnych.
210. Definicja sumy i indeksowanej sumy liczb kardynalnych.
211. Definicja iloczynu i indeksowanego iloczynu liczb kardynalnych.
212. Definicja potęgowania liczb kardynalnych.
213. Czy suma dwóch liczb kardynalnych zawsze istnieje? Odpowiedź uzasadnić.
214. Udowodnić, że $\mathfrak{n} + \aleph_0 = \aleph_0$, gdzie \mathfrak{n} oznacza dowolną liczbę kardynalną skończoną.
215. Udowodnić, że $\mathfrak{n} \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
216. Udowodnić, że $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
217. Udowodnić, że $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.
218. Udowodnić, że $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.
219. Udowodnić, że $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.
220. Udowodnić, że $\mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}) + (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p})$, gdzie \mathfrak{m} , \mathfrak{n} , \mathfrak{p} są dowolnymi liczbami kardynalnymi.

221. Udowodnić, że $\mathbf{n} \cdot 1 = \mathbf{n}$ dla dowolnej liczby kardynalnej \mathbf{n} .
222. Udowodnić, że $\mathbf{m} + \mathbf{n} = \mathbf{n} + \mathbf{m}$ dla dowolnych liczb kardynalnych \mathbf{m}, \mathbf{n} .
223. Udowodnić, że $\mathbf{m}^{\mathbf{n}+\mathbf{p}} = \mathbf{m}^{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m}^{\mathbf{p}}$ dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$.
224. Udowodnić, że $(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^{\mathbf{p}} = \mathbf{m}^{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}^{\mathbf{p}}$ dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$.
225. Udowodnić, że $1^{\mathbf{m}} = 1$ dla dowolnej liczby kardynalnej \mathbf{m} .
226. Zbadać prawdziwość formuły $\overline{2^A} = \overline{2^A}$.

IX. SYSTEMY RELACYJNE

227. Definicja systemu relacyjnego. Przykłady szczególne przypadków systemów.
228. Definicja sygnatury i typu systemu relacyjnego oraz ich przykłady.
229. Definicja homomorfizmu i silnego homomorfizmu systemów relacyjnych.
230. Definicja monomorfizmu i izomorfizmu systemów relacyjnych.
231. Aksjomat typów relacyjnych i własności relacji izomorfizmu.
232. Twierdzenie o związku pomiędzy równolicznością zbiorów a izomorficznością systemów z wnioskiem.
233. Definicja niezmiennika izomorfizmu i przykłady niezmienników.
234. Definicja posetu i losetu i ich przykłady.
235. Lemat Kuratowskiego-Zorna. Definicje pojęć występujących w lemacie.
236. Definicje łańcucha i antyłańcucha oraz ich przykłady.
237. Definicja dualnego systemu relacyjnego. Podać i udowodnić własność dotyczącą systemów dualnych.
238. Definicje posetu gęstego w sobie i podposetu gęstego w posecie z przykładami.
239. Definicje typu losetowego i typu gosetowego z przykładami.
240. Definicje typów losetowych $\omega, \pi, \eta, \lambda$.
241. Warunek konieczny i wystarczający dla typu porządkowego ω .
242. Twierdzenie o uniwersalności typu η z dowodem.
243. Definicja sumy typów losetowych.
244. Definicja iloczynu typów losetowych.
245. Udowodnić, że $1 + \omega \neq \omega + 1$.
246. Udowodnić, że $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$.
247. Udowodnić, że $\pi = \omega^* + \omega$.
248. Udowodnić, że $\lambda + \lambda \neq \lambda$.
249. Udowodnić, że $\lambda + 1 + \lambda = \lambda$.